Komputer algebra (Mm 5121) Szerda 12-15, Bolyai kabinet

2. zárthelyi dolgozat
2006. november 29.

A megoldásra fordítható idő: **120 perc**. A feladatok megoldásai, illetve a dolgozat eredménye a

www.math.u-szeged.hu/~dorman/MAIN/ForStudents.html

címen érhető majd el. Jó munkát kívánok!

1. feladat. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, illetve kifejezéseket a megadott intervallumokon. A grafikonok szépek legyenek.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + \dfrac{1}{x+1}$, $x \in I = [-1, 2]$, a grafikon színe kék;

(b) $x^4y^2 + y^2 + x^4 \sin x + x^2y^4 = 19$, $x \in I = [-4, 7]$, a grafikon színe piros.

Ábrázoljuk őket közös koordináta-rendszerben is.

2. feladat. Határozzuk meg az a és b valós számok értékét, ha tudjuk, hogy az $ax + b$ egyenes pontosan két pontban érinti az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 + 3x^3 - x^2 - x - 6$ függvény grafikonját.

3. feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 0, \\ x^{99} - y^{99} + z^{99} = 2^{100}. \end{cases}$$

4. feladat. Mutassuk meg, hogy bármely 3×3-as bűvösnégyzet első sorában szereplő számok négyzetének összege egyenlő a harmadik sor számainak négyzetösszegével. (Büvös négyzetnek nevezzük az olyan $n \times n$-es számokból álló táblázatot, amelynek minden sorában, oszlopában és a két átlójában a számok összege ugyanannyi.)

5. feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 30 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Keressünk egy olyan nemelfajuló $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixot, amelyre $B^{-1}AB = A$ teljesül. Határozzuk meg az A^n mátrixot, ahol n tetszőleges természetes szám.

6. feladat. Határozzuk meg az alábbi egyenleteket összes megoldását vagy a megoldások közelítő értékét a megadott halmazo(ko)n.

(a) $x^7 + x^4 - 1$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;

(b) $x^6 - 3x^4 - 1$ $(\mathbb{Z}_{1973})$;

(c) $|\ln(\sin 4x)| = \cos x$ $([-\pi, \pi])$;

(d) $|\sin 4x| = \cos x$ $(\mathbb{R})$;

(e) $y^2 = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3}$ $(\{-100, -99, \ldots, 99, 100\})$;

7. feladat. Legyenek $0 < p < q < 1$ tetszőleges racionális számok. Írjunk meg azt az $LNT(p, q)$ eljárást, amely meghatározza a (p, q) intervallumba eső legkisebb nevezőjű törte(ke)t nevezőjét. Határozzuk meg $LNT\left(\dfrac{47}{245}, \dfrac{34}{177}\right)$ értékét.