LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

2004. október 12.

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
5. fejezet (Lineáris egyenletrendszerek);

további ajánlott irodalom:
Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos:
Matematika III. (fakultatív B változat), (gimnáziumi tankönyv);
VIII. fejezet (366. oldaltól - 377. oldalig, feladatok is!)

D. K. Fagyejev–I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai feladatok*,
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, illetve Typotex Kiadó, 2000;
3. fejezet, 1. szakasz (A Cramer-szabály): 335. - 354. feladat
3. fejezet, 4. szakasz (Lineáris egyenletrendszerek): 398. - 420. feladat
Különösen ajánlott feladatok: 335., 342., 346., 353., 398., 400.-401., 403.-404., 406.-407., 411., 416.

Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás* (példatár, Bolyai-könyvek sorozat),
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000;
A Lineáris egyenletrendszerek vizsgálata c. fejezetben (a 212. oldaltól): 1. - 3., 7. - 8.
A Mátrixok c. fejezetben a Négyzetes mátrix adjungáltja és inverze c. szakaszban (a 167. oldaltól, feladatok a 178. oldaltól): 17. - 20. feladat

Példák

1. Példa. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 &= 2 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 10x_4 + 3x_5 &= -8 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 9x_4 - 2x_5 &= 3 \\ -x_1 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Megoldás: Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, majd a jegyzetben (ill. az előadáson) ismertetett módszer* segítségével alakítsuk lépcsős alakúra. A lépcsős alakról a megoldhatóság és, amennyiben az egyenletrendszer megoldható, a megoldások leolvashatók.

(a) *Első megoldás:* Az egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{pmatrix}$$

Adjuk hozzá az első sor (-1)-szeresét a második sorhoz, majd az első sor (-3)-szorosát a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{pmatrix}$$

Adjuk hozzá a második sor (-4)-szeresét a harmadikhoz, valamint a második sor $\left(\frac{2}{3}\right)$-szorosát az első sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Szorozzuk meg a második sort $\left(-\frac{1}{3}\right)$-dal, a harmadikat pedig $\left(-\frac{1}{8}\right)$-dal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Végül adjuk hozzá a harmadik sor $\left(-\frac{2}{3}\right)$-szorosát a második sorhoz, illetve $\left(-\frac{11}{3}\right)$-szorosát az első sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A mátrixnak megfelelő egyenletrendszer és egyben a megoldás:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -3 \qquad x_3 = -1\,.$$

*Másik megoldás:*** Kevesebbet kell a mátrixszal számolni (viszont a végén nem adódnak közvetlenül a megoldások), ha az alábbi módszert követjük: adjuk hozzá az első sor (-1)-szeresét a második sorhoz, majd az első sor (-3)-szorosát a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{pmatrix}$$

*Gauss-eliminációnak, vagy gyakran Gauss-Jordan-eliminációnak is nevezik.

**A jegyzettel ellentétben a matematikai irodalomban ezt szokás Gauss-eliminációnak nevezni.

Adjuk hozzá a második sor (-4)-szeresét a harmadikhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

A kapott mátrixnak megfelelő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ -3x_2 - 2x_3 &= 11 \\ -8x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $x_3 = -1$ adódik. A második egyenletből kifejezhető x_2 az x_3 segítségével:

$$x_2 = \frac{11 + 2x_3}{-3}$$

Ebbe behelyettesítve x_3 imént kapott értékét: $x_2 = -3$. Az első egyenletből pedig x_1 fejezhető ki x_2-vel és x_3-mal:

$$x_1 = -9 - 2x_2 - 5x_3$$

Kapjuk, hogy $x_1 = 2$.

(b) Az egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

A Gauss-elimináció lépései:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A kapott mátrixhoz tartozó egyenletrendszer utolsó egyenlete $0 = 1$, így az egyenletrendszer ellentmondó (nincs megoldása).

(c) Hajtsunk végre egy Gauss-Jordan-eliminációt a rendszer mátrixán:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 4 & -10 & 3 & -8 \\ 2 & -1 & -5 & 9 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A kapott mátrix lépcsős alakú és leolvasható róla, hogy az egyenletrendszer megoldható. Az ismeretlenek közül x_1 és x_2 kötött, míg a másik három szabad; mivel van szabad ismeretlen, a megoldások száma végtelen. Ilyen esetben a megoldások megadása nem más, mint a kötött ismeretlenek kifejezése a szabadokkal:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 \\ x_2 &= -1 + x_3 - x_4 \end{aligned}$$

ahol x_3, x_4, x_5 tetszőleges valós számok.

Alkalmazás. Valamely A mátrix inverzének megkeresése az $AX = E$ mátrixegyenlet megoldását jelenti, ahol E az A-val azonos típusú egységmátrix. Egyszerűen belátható, hogy ez ekvivalens az alábbi egyenletrendszerekkel:

$$A\underline{x}_i = \underline{e}_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol $\underline{x}_i$ a keresett X mátrix i-edik oszlopvektora, $\underline{e}_i$ pedig az E mátrix i-edik oszlopvektora. Az A-nak pontosan akkor van inverze, ha determinánsa nem nulla, ebben az esetben viszont a Cramer-szabály alapján a fönti egyenletrendszerek *mindegyike* megoldható. A megoldáshoz azonban nem érdemes a Cramer-szabályt alkalmazni.
Mivel ezen egyenletrendszerek együtthatómátrixa azonos (ti. A), ezért ezeket egyszerre is megoldhatjuk. Célszerű Gauss-Jordan eliminációval dolgozni, akkor ugyanis — amennyiben van megoldás — a jobboldali konstans-oszlopok helyén „kirajzolódik” az A mátrix inverze. A módszert egy példán mutatjuk be:

2. Példa. Gauss-Jordan elimináció segítségével számítsa ki a következő mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás Írjuk fel a mátrixot és a vele azonos típusú egységmátrixot egymás mellé (a jobb áttekinthetőség érdekében függőleges vonallal elválasztva). Gauss-Jordan eliminációval alakítsuk ki a bal oldalon (a mátrixunk helyén) az egységmátrixot (természetesen minden elemi átalakítást a vonaltól jobbra is elvégzünk). Amennyiben ez sikerül, akkor a mátrixnak van inverze és a jobb oldalon megjelenik a mátrix inverze.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 11 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -10 & -10 & 10 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -8 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -10 & -10 & 10 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -15 & 10 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & -\frac{7}{2} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & -3 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

A baloldalon E_4 áll, a mátrixnak tehát van inverze, mégpedig:

$$\begin{pmatrix} -15 & 10 & -8 & 5 \\ 6 & -\frac{7}{2} & 3 & -2 \\ \frac{9}{2} & -3 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

További ajánlott feladatok

1. Feladat. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

(a)
$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}&=\frac{5}{12} \\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{4}{z}&=-\frac{5}{3} \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}-\frac{2}{z}&=-\frac{9}{4} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}&=36,5 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}&=27 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{6}+\frac{z}{7}&=18 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x-2y+3z-u&=5 \\ y-2z+3u-x&=0 \\ z-2u+3x-y&=0 \\ u-2x+3y-z&=5 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_2+x_3+x_4&=1 \\ x_1+x_3+x_4&=3 \\ x_1+x_2+x_4&=5 \\ x_1+x_2+x_3&=7 \end{aligned}$$

2. Feladat. Mutassa meg, hogy az

$$\begin{aligned} x_1-\frac{1}{3}\,x_2+2\,x_3-\frac{1}{2}\,x_4&=1 \\ 5\,x_1-x_2+9\,x_3-4\,x_4&=1 \\ 3\,x_1+2\,x_2+6\,x_3-7\,x_4&=11 \\ 3\,x_1-x_2+6\,x_3-\frac{3}{2}\,x_4&=2 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása. Módosítsuk a negyedik egyenlet jobboldalát olyképpen, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen.

3. Feladat. Határozza meg az a értékét úgy, hogy a következő egyenletrendszereknek egyetlen megoldása legyen:

(a)
$$\begin{aligned} 2x-y&=5 \\ x+3y&=4 \\ x+y&=a \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x+2y&=8 \\ (a+1)x+y&=2 \\ 2x+3y&=10 \end{aligned}$$

4. Feladat. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ha a valós paraméter:

$$\begin{aligned} x+y-z&=1 \\ 2x+3y+az&=3 \\ x+ay+3z&=2 \end{aligned}$$

5. Feladat. Az a, b valós paraméter mely értékeire szabályos az alábbi egyenletrendszer? Ezen értékekre oldja meg a rendszert a Cramer-szabály segítségével. A többi esetben pedig Gauss-eliminációval határozza meg a megoldást.

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x + by + z &= 3 \\ x + 2by + z &= 4 \end{aligned}$$

6. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ha d valós paraméter:

$$\begin{aligned} dx + (2d-1)y + (d+2)z &= 1 \\ (d-1)y + (d-3)z &= 1 + d \\ dx + (3d-2)y + (3d+1)z &= 2 - d \end{aligned}$$

7. Feladat. A 2. Példában bemutatott módszer segítségével (is) számítsa ki az Inverz mátrix c. feladatsor 1. feladatában szereplő mátrixok inverzeit.