MÁTRIXOK

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*,
Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
2. fejezet (Mátrixok);

további ajánlott irodalom:
Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos:
Matematika III. (fakultatív B változat), (gimnáziumi tankönyv);
VIII. fejezet (345. oldaltól - 363. oldalig, feladatok is!!)

D. K. Fagyejev–I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai feladatok*,
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, illetve Typotex Kiadó, 2000;
4. fejezet, 1. szakasz, 464. - 465., 467. - 479., 506. feladat

Freud Róbert: *Lineáris algebra*,
ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001;
2. fejezet, 1. szakasz.

Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás* (példatár, Bolyai-könyvek sorozat),
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000;
A Mátrixok c. fejezetben (fogalmak, jelölések a 89. o.-tól),
Kidolgozott feladatok (a 113. oldaltól): 1.-9., 24.-57., 68., 71.-74.

Példák

1. Példa. Számítsa ki a következő mátrixok közül azokat, amelyek léteznek:
(a) $A^T,\ B^T$,
(b) $A+B,\ C+D,\ D-C$,
(c) $3A$,
(d) $AD,\ DA,\ B^TA$,

ha

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}.$$

Megoldás.
(a)

$$A^T=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&4\end{pmatrix},\qquad B^T=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}^T=(\,1\quad 2\quad -1\,);$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(b) $A+B$ nem létezik, mivel A és B nem azonos típusúak: az A mátrix 3×2-es, B pedig 3×1-es típusú.
C és D viszont azonos típusúak, így összeadhatók:

$$C+D=\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1&-1+2\\3+(-3)&0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix};$$

és persze a kivonás is elvégezhető:

$$D-C=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2&2-(-1)\\-3-3&4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\-6&4\end{pmatrix};$$

(c)

$$3\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1&3\cdot 0\\3\cdot(-1)&3\cdot 2\\3\cdot 3&3\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-3&6\\9&12\end{pmatrix};$$

(d) AD értelmezett, hiszen A-nak 2 oszlopa van, D-nek pedig 2 sora. A szorzatmátrixot a definíció alapján a következő módon számítjuk ki:

$$AD=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 3&1\cdot 2+0\cdot 4\\(-1)\cdot 1+2\cdot 3&(-1)\cdot 2+2\cdot 4\\3\cdot 1+4\cdot 3&3\cdot 2+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\\16&22\end{pmatrix},$$

(Látjuk, hogy a szorzatmátrixnak 3 sora van, mint A-nak, és 2 oszlopa van, mint D-nek.)
DA nem létezik, mivel D oszlopainak száma nem egyezik meg A sorainak számával.

$$\begin{aligned}B^TA&=\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&4\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 3&1\cdot 0+2\cdot 2+(-1)\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

További ajánlott feladatok

1. Feladat. Tegyük fel, hogy A,B adott, X pedig ismeretlen, azonos méretű mátrixok. Oldja meg az alábbi „mátrix-egyenleteket” (azaz a műveletek ismert-tanult tulajdonságai alapján fejezzük ki az X mátrixot az összefüggésből):

(a) $X+A=2(X-B)$ (b) $3\big(X+\frac{1}{2}A\big)=5\big(X-\frac{3}{4}B\big)$.

Adjuk meg a megoldásokat, abban az esetben, ha

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\qquad\text{és}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

2. Feladat. Szorozza össze az alábbi mátrixok közül az összeszorozhatókat:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 0 & 1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 5 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Feladat. Szorozzuk össze a alábbi mátrixokat mindkét sorrendben. Milyen „érdekességet” tapasztalunk?

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

4. Feladat. Mutassunk rá egy példával, hogy mátrixok körében nem lehet egyszerűsíteni, azaz keressünk olyan A, B, C mátrixokat (pl. a 2×2-es mátrixok körében), hogy $AB = AC$, de $A \neq O$ és $B \neq C$.

5. Feladat. Mi történik egy 3×3-as mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixszal megszorozzuk:

(a) $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ (b) $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(c) $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ (d) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(Próbáljunk általánosítani!)

* * * * * * * * * *

Megjegyzés. Azonos típusú négyzetes mátrixok esetén az összeszorozhatóság feltétele teljesül, és a szorzat is ugyanolyan típusú lesz. Ezért (és a szorzás asszociativitása miatt!) négyzetes mátrix esetén értelmezhető a hatványozás:

$$A^1 = A, \text{ és ha } n \geq 2, \text{ akkor } A^n = AA^{n-1}, \quad A \in T^{n \times n}.$$

Abban is megállapodunk, hogy $A^0 = E_n$, az $n \times n$-es egységmátrix.

6. Feladat. Igazoljuk a mátrix-hatványozás alábbi azonosságait (m, k nemnegatív egész számok):

(a) $A^m A^k = A^{m+k}$, ahol $m, k \in \mathbb{N}$;
(b) $(A^m)^k = A^{mk}$, ahol $m, k \in \mathbb{N}$;

Mutassunk rá, hogy $(AB)^m = A^m B^m$ általában nem teljesül. Milyen feltétel(ek) mellett teljesül ez az összefüggés?

7. Feladat. Számítsa ki az alábbi mátrix-hatványokat (n természetes szám, a valós szám):

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{1111} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{1111} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1111} \qquad (d)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$$

$$(g)\ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{n} \qquad (h)\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{n} \qquad (i)\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}^{n}$$

8. Feladat. (2003-as dolgozatfeladat)
Számítsa ki a következő mátrixok közül azokat, amelyek léteznek:

$$FC^T + B^T, \qquad G^2C^T, \qquad FA + BD^T, \qquad AG^2 + G$$

ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Feladat. Ha A és B tetszőleges $n \times n$-es (azaz négyzetes) mátrixok, igazak-e a következők:

(1) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;
(2) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
(3) Ha $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, akkor $AB = BA$;

(Ha igaz, bizonyítsa be; ha nem, keressen ellenpéldát pl. a 2×2-es mátrixok között.)

10. Feladat. Számítsa ki az $A^2 + 3A - 4E_3$ kifejezés értékét az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixra. (Másszóval: számítsa ki az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ polinom helyettesítési értékét az A helyen.)

11. Feladat. Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$ mátrix röviden a következőképpen írható föl: $A = (a_{ij})_{3\times 4}$, ahol $a_{ij} = i^j$. Hasonlóan a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix röviden a következő: $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, ahol $b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \le j, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

Írja föl az alábbi „képlettel megadott" mátrixokat:

(1) $X = (x_{ij})_{4\times 3}$, ahol $x_{ij} = i + j$;

(2) $X = (x_{ij})_{3\times 3}$, ahol $x_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{ha } i > j, \\ 0, & \text{ha } i = j, \\ 1, & \text{ha } i < j; \end{cases}$

(3) $X = (x_{ij})_{3\times 4}$, ahol $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i + j \text{ páros} \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$

(4) $X = (x_{ij})_{n\times n}$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $x_{ij} = \begin{cases} 2^{i-j}, & \text{ha } i \ge j, \\ 0, & \text{különben;} \end{cases}$;

(5) $X = (x_{ij})_{4\times 4}$, ahol $x_{ij} = (-1)^{i-j}$;

(6) $X = (a_{ij})_{6\times 6}$, ahol x_{ij} az i és j legnagyobb közös osztója;

Megjegyzés. Ez az írásmód a mátrixok egy másik fölfogásának felel meg. Hasonlóan ahhoz, ahogyan pl. egy valós szám n-esre időnként mint egy $\{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ leképezésre gondolunk, ugyanúgy egy T számtest fölötti $n \times k$-as mátrix nem más, mint egy $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, k\} \to T$ leképezés.

12. Feladat. Találjuk ki a az alábbi mátrixok „képletét":

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \quad S \overset{*}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$