3. Feladatsor

Normális bővítések

Tegyük fel, hogy az $L : K$ testbővítés algebrai. Azt mondjuk, hogy az $F : L$ bővítés az $L : K$ bővítés **normális lezártja**, ha az $F : K$ bővítés normális, és valahányszor az $F : L$ bővítés M közbülső testére az $M : K$ bővítés normális mindannyiszor $M = F$ teljesül.

1. Mutassuk meg, hogy tetszőleges algebrai bővítésnek van normális lezártja.

2. Tegyük fel, hogy $L : K$ algebrai bővítés, és legyen

$$\mathcal{N} = \{M : K \leqslant M \leqslant L,\ M : K \text{ normális bővítés}\}.$$

Mutassuk meg, hogy az $(\mathcal{N};\ \subseteq\ )$ részbenrendezett halmaznak van legnagyobb eleme.

3. Tegyük fel, hogy M_1 és $_2$ az $L : K$ bővítés olyan közbülső testei, amelyekre az $M_1 : K$ és $M_2 : K$ bővítések normálisak. Bizonyítsuk be, hogy a $K(M_1 \cup M_2) : K$ és $M_1 \cap M_2 : K$ bővítések is normálisak.

4. Legyen $L : K$ véges normális bővítés, valamint $f \in K[x]$ irreducibilis polinom. Tegyük fel, hogy a g és h $L[x]$-beli irreducibilis főpolinomok osztói f-nek L felett. Igazoljuk, hogy van olyan $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$, amelyre $\sigma_g = h$.

5. Legyen L algebrai testbővítése a K testnek. Mutassuk meg, hogy a következők ekvivalensek.

(i) Az $L : K$ testbővítés normális.

(ii) Ha $\mathfrak{j}\colon L \to \overline{L}$ olyan injektív homomorfizmus, amelyre tetszőleges $k \in K$ esetén $\mathfrak{j}(k) = k$ teljesül, akkor $\mathfrak{j}(L) \subseteq L$.[1]

(iii) Ha $\mathfrak{j}\colon L \to \overline{L}$ olyan injektív homomorfizmus, amelyre tetszőleges $k \in K$ esetén $\mathfrak{j}(k) = k$ teljesül, akkor $\mathfrak{j}(L) = L$.

[1] Tetszőleges L test esetén $\overline{L}$ jelöli az L test egyik algebrai lezártját.

Szeparábilis bővítések

6. Legyen $L : K$ véges testbővítés, melynek normális lezártja $L' : L$. Mutassa meg, hogy az $L : K$ testbővítés akkor és csak akkor szeparábilis, ha pontosan $[L : K]$ darab olyan $\mathsf{j}\colon L \to L'$ injektív homomorfizmus van, amelyre tetszőleges $k \in K$ esetén $\mathsf{j}(k) = k$ teljesül.

7. Legyen n természetes szám. Tegyük fel, hogy K olyan test, amelyre $\mathrm{char}(K) = 0$ vagy $\mathrm{char}(K) > n$ teljesül. Legyen $f \in K[x]$ egy n-edfokú polinom és $\alpha \in K$. Mutassuk meg, hogy

$$f = f(\alpha) + \sum_{k=1}^{n} \frac{D_x^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k,$$

ahol $D_x^{(0)} = \mathrm{id}_{K[x]}$ és $D_x^{(k)} = D_x \circ D_x^{(k-1)}$ $(k \geqslant 1)$.

8. Legyen n természetes szám. Tegyük fel, hogy K olyan test, amelyre $\mathrm{char}(K) = 0$ vagy $\mathrm{char}(K) > n$ teljesül. Legyen $f \in K[x]$ egy n-edfokú polinom és α az f polinom gyöke valamely L felbontási testében. Mutassuk meg, hogy az α gyök multiplicitása pontosan akkor r, ha

$$D_x^{(s)}(\alpha) = 0 \ (0 \leqslant s \leqslant r-1) \qquad \text{és} \qquad D_x^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

9. Legyen p prímszám. Bontsuk elsőfokú tényezők szorzatára az $x^p - 1$ polinomot $\mathbb{Z}_p$ felett, majd gondoljuk meg, hogy $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

10. Legyen p prímszám. Igazolja a következőket.

(a) Ha $p \equiv 1 \pmod 4$, akkor

- van olyan k egész szám, amelyre $k^2 \equiv -1 \pmod p$;
- p nem prímelem $\mathbb{Z}[i]$-ben,
- vannak olyan u és v egészek, amelyekre $p = u^2 + v^2$ teljesül.

(b) Ha $p \equiv -1 \pmod 4$, akkor p prímelem $\mathbb{Z}[i]$-ben.

11. Legyen K olyan test, melynek karakterisztikája $p > 0$. Mutassa meg, hogy pontosan akkor szeparábilis minden K feletti polinom, ha a Frobenius-endomorfizmus a K test automorfizmusa.[2]

[2] Azt mondjuk, hogy a K test **tökéletes**, ha minden $K[x]$-beli polinom szeparábilis.

12. Bizonyítsa be, hogy a K test akkor és csak akkor tökéletes, ha minden véges bővítése szeparábilis.

13. Tegyük fel, hogy K olyan test, amelyre $\mathrm{char}(K) = p > 0$ teljesül. Igazolja, hogy tetszőleges irreducibilis K feletti f polinomhoz van olyan irreducibilis és szeparábilis K feletti g polinom és $n \in \mathbb{N}_0$, amelyre $f = g(x^{p^n})$ áll fenn.

14. Tegyük fel, hogy K olyan test, amelyre $\mathrm{char}(K) = p > 0$ teljesül. Legyen $f \in K[x]$ irreducibilis polinom, melynek egy felbontási K felett L. Mutassa meg, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}_0$, hogy f valamennyi gyökének multiplicitása p^n.

Automorfizmusok és fixtestek

15. Legyenek K és L olyan testek, amelyekre $L : K$ Galois-bővítés. Igazolja, hogy az $\alpha \in L$ elemre pontosan akkor teljesül, hogy $L = K(\alpha)$, ha $|\,\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(L : K)\}\,| = |\mathrm{Gal}(L : K)|$.

16. Legyenek K és L olyan testek, amelyekre $L : K$ teljesül. Igazolja, hogy $\mathrm{Gal}(L : K)$ lineárisan független részhalmaza $\mathrm{End}_K(L)$-nek.[3]

17. Legyenek K és L olyan testek, amelyekre $L : K$ Galois-bővítés, és legyen $\mathrm{Gal}(L : K) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Mutassa meg, hogy az $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq L$ pontosan akkor bázisa L-nek K felett, ha a $(\sigma_s(\beta_t)) \in L^{n\times n}$ mátrix determinánsa nem 0.

18. Legyen L a K 0-karakterisztikájú test véges bővítése. Legyen a $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vektorrendszer az L vektrotér bázisa K felett. Az $L : K$ bővítés Galois-csoportjának H részcsoportjára legyen $\gamma_j = \sum_{\sigma\in H} \sigma(\beta_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Bizonyítsa be, hogy $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \gamma(H)$.

19. Határozza meg az S_3, S_4 és S_5 permutációcsoportok tranzitív részcsoportjait.

20. Határozza meg az $x^4 - 2$ polinom Galois-csoportját $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_7$ felett.

21. Határozza meg az $x^4 + 2$ polinom Galois-csoportját $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.

[3] $\mathrm{End}_K(L)$ az L vektortér lineáris transzformációinak vektortere (K felett).

22. Tetszőleges r természetes számra legyen

$$f_r = (x^2+4)x\prod_{j=1}^{r}(x^2-4j^2).$$

Igazolja, hogy

(a) tetszőleges $s \in \mathbb{Z}$-re $|f_r(2s+1)| \geqslant 5$;

(b) $f_r - 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

Határozza meg az f_r polinom Galois-csoportját $\mathbb{Q}$ felett, ha $2r+3$ prímszám.

23. Legyen G tetszőleges véges csoport. Mutassa meg, hogy van olyan $L:K$ Galois-bővítés, melyre $\mathrm{Gal}(L:K) \cong G$ teljesül.

24. Tegyük fel, hogy K_1 és K_2 az L test olyan résztestei, amelyekre $L:K_1$ és $L:K_2$ Galois-bővítések. Legyen $G_j = \mathrm{Gal}(L:K_j)$ $(j=1,2)$ és $G = G_1 \cap G_2$. Bizonyítsa be, hogy $L:G$ pontosan akkor Galois-bővítés, ha $\langle G_1 \cup G_2\rangle$ véges. Amennyiben ez utóbbi feltétel teljesül, akkor $G = \mathrm{Gal}(L:K_1 \cap K_2)$.

25. Legyenek K és L testek, amelyekre teljesül, hogy $[L:K]=2$. Tegyük fel továbbá, hogy

- bármely $\alpha \in K$-hoz van olyan $\beta \in L$, amelyre $\alpha = \beta^2$,
- ha $f \in K[x]$ és $2 \nmid f^*$, akkor f-nek van gyöke L-ben,
- $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Legyen f irreducibilis polinom $K[x]$-ben, melynek egy L feletti felbontási teste legyen M. Legyen továbbá $G = \mathrm{Gal}(M:K)$ és $H = \mathrm{Gal}(M:L)$. Igazolja a következőket.

(i) $|G| = 2^n$ teljesül valamely $n \in \mathbb{N}$-re. (Tekintsük a G csoport egy 2-Sylow részcsoportjának fixtestét.)

(ii) Ha $n > 1$, akkor $L[x]$-ben van másodfokú irreducibilis polinom. (Tekintsük a H csoport egy 2-indexű részcsoportját.)

(iii) L algebrailag zárt.

26. Legyen p páratlan prímszám és ζ primitív p-edik egységgyök. Legyen $E = \mathbb{Q}[\zeta]$, $G = \mathrm{Gal}(E:\mathbb{Q})$ és a G csoport 2-indexű részcsoportja. Legyen $\alpha = \sum_{j\in H}\zeta^j$ és $\beta = \sum_{j\in G\setminus H}\zeta^j$. Mutassa meg, hogy

(a) $\alpha, \beta \in \gamma(H)$;

(b) ha $\sigma \in G \setminus H$, akkor $\sigma(\alpha) = \beta$ és $\sigma(\beta) = \alpha$.

Határozzuk meg H fixtestét.

27. Legyen $M = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ és $E = M(\alpha)$, ahol $\alpha = \sqrt{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{3}+3)}$. Mutassa meg, hogy

(a) $M : \mathbb{Q}$ Galois-bővítés és $\mathrm{Gal}(M : \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;

(b) $E : \mathbb{Q}$ Galois-bővítés és $\mathrm{Gal}(E : \mathbb{Q}) \cong Q$.