2. Feladatsor

Felbontási testek

1. Mutassa meg, hogy az $f = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinom irreducibilis. Legyen ζ az f polinom gyöke valamely felbontási testében. Igazolja, hogy $\zeta - 1$ és $\zeta + 1$ is gyöke f-nek. Adja meg az f polinom egy felbontási testét.

2. Legyen K olyan test, amely felett az $x^n - 1$ polinom elsőfokú tényezők szorzatára bontható. Tegyük fel, hogy $K(t) : K$ egyszerű transzcendens bővítés. Mutassa meg, hogy $x^n - t$ irreducibilis $K(t)$ felett. Adja meg az $x^n - t$ polinom egy felbontási testét.

3. Az $i\sqrt{3}$ és $1+i\sqrt{3}$ komplex számok gyökei az $f = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 12 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomnak. Van-e olyan σ automorfizmusa az f polinom $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testének, amelyre $\sigma(i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$ teljesül?

4. A K, L és M testekre teljesül, hogy $L : K$ és $M : L$. Tegyük fel, hogy $\alpha \in M$ algebrai elem K felett. Igaz-e, hogy $[L(\alpha) : L] \mid [K(\alpha) : K]$ mindig teljesül?

5. Legyen $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ tetszőleges 3-adfokú irreducibilis polinom. Konstruálja meg az f polinom egy felbontási testét, és ezen test felett bontsa elsőfokú tényezők szorzatára.

6. Határozza meg az $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egy L felbontási testét, valamint az $L : \mathbb{Q}$ bővítés fokát. Keressen olyan $\alpha \in L$ elemet, amelyre $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ teljesül:

(a) $f = x^4 - 5x^2 + 6$;

(b) $f = x^4 + 5x^2 + 6$;

(c) $f = x^4 - 5$.

7. Tegyük fel, hogy L felbontási teste az n-edfokú f polinomnak a K test felett. Mutassa meg, hogy $[L : K] \mid n!$.

8. Adja meg az $x^3 - 5$ polinom egy felbontási testét $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$ és $\mathbb{Z}_{13}$ felett.

9. Határozza meg a $p \in \mathbb{Q}[x]$ polinom $F \leqslant \mathbb{C}$ felbontási testét $\mathbb{Q}$ felett:

(a) $p = x^2 - 2x - 3$; (b) $p = x^2 - 2x - 2$; (c) $p = x^2 - 2x + 2$;
(d) $p = x^4 - 1$; (e) $p = x^4 - 2$; (f) $p = x^4 + 2$;
(g) $p = x^4 + 4$; (h) $p = x^4 - x^2 + 1$; (i) $p = x^4 + x^2 + 1$;
(j) $p = x^6 - x^3 - 1$; (k) $p = x^6 - 2$; (l) $p = x^6 + 2$.

Határozza meg az $F : \mathbb{Q}$ bővítés fokát.

10. Mutassa meg, hogy az alábbi bővítések egyszerűek. Határozza meg a generáló elem minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett.

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{10}) : \mathbb{Q}$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}$;

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) : \mathbb{Q}$;

(d) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i) : \mathbb{Q}$;

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}$.

11. Legyen p tetszőleges prímszám, és legyen $f = x^p - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Bizonyítsa be, hogy ha L az f polinom felbontási teste $\mathbb{Q}$ felett, akkor $[L : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

12. Legyen $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mutassa meg, hogy $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ felbontási teste az $x^6 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomnak. Határozza meg a $\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}$ bővítés fokát.

Algebrai lezárt

13. Legyen $U \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, valamint $V \subseteq W \subseteq U$. Igazolja, hogy ha $f\colon V \to P(U)$ injektív leképezés, akkor van olyan injektív $g\colon W \to P(U)$ leképezés, amelyre $g|_V = f$.

14. Legyen K tetszőleges test, valamint legyen $U = K[x] \times \mathbb{Z}^+$.

(a) Mutassa meg, hogy ha (k, K, L) algebrai bővítés, akkor van olyan $L \to U$ leképezés, amely injektív.

(b) Tegyük fel, hogy a (k, K, L) és (l, L, M) bővítések algebraiak. Igazolja, hogy ha $f\colon L \to P(U)$ injektív leképezés, akkor van olyan $g\colon M \to P(U)$ injektív leképezés, amelyre $f = g \circ l$ teljesül.

15. Legyen K tetszőleges test, $U = K[x] \times \mathbb{Z}^+$, valamint $\mathfrak{j}\colon K \to P(U),\ \alpha \mapsto \{(x-\alpha, 1)\}$.

(a) Mutassa meg, hogy a $\mathfrak{j}$ leképezés injektív, és a $\mathfrak{j}(K)$ halmaz testté tehető oly módon, hogy $\mathfrak{j}$ izomorfizmus legyen a K és $\mathfrak{j}(K)$ testek között.

(b) Legyen $\mathcal{F}$ mindazon $F(S) := (S;\, +\,,\ \cdot\,)$ algebrák halmaza, amelyekre teljesül, hogy

- $\mathfrak{j}(K) \subseteq S \subseteq P(U)$,
- $F(S)$ test,
- az $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}(K), F(S))$ bővítés algebrai, ahol $\mathfrak{i}\colon \mathfrak{j}(K) \to F(S),\ \xi \mapsto \xi$.

Az $\mathcal{F}$ halmazon definiáljuk a $\leqslant$ részbenrendezést az alábbi módon:

$$(S_1;\, +_1\,,\ \cdot_1\,) \leqslant (S_2;\, +_2\,,\ \cdot_2\,) \iff S_1 \subseteq S_2 \text{ és } (\mathfrak{i}, F(S_1), F(S_2)).$$

Mutassuk meg, hogy $\mathcal{F}$-ben van maximális elem.

(c) Igazolja, hogy ha $(S;\, +\,,\ \cdot\,)$ maximális elem $\mathcal{F}$-ben, akkor $(j, K, F(S))$ algebrai lezártja K-nak.

16. Mutassa meg, hogy tetszőleges algebrailag zárt test végtelen.

17. Tegyük fel, hogy $K(\alpha) : K$ egyszerű bővítés és α transzcendens K felett. Mutassa meg, hogy $K(\alpha)$ nem algebrailag zárt.