Feladatok

Testek és testbővítések

1. Legyen $\mathbb{Z}[\xi] = \{a + b\xi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ és $\mathbb{Q}[\xi] = \{a + b\xi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, ahol $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ egy másodfokú valós együtthatós polinom egyik gyöke. A másik gyököt jelölje ξ'. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathbb{Z}[\xi]$ elemeinek $a + b\xi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ alakban való előállítása egyértelmű;

(b) $\mathbb{Q}[\xi]$ elemeinek $a + b\xi$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ alakban való előállítása egyértelmű;

(c) $\mathbb{Z}[\xi]$ gyűrű a szokásos összeadásra és szorzásra;

(d) $\mathbb{Q}[\xi]$ számtest;

(e) $\mathbb{Z}[\xi] = \mathbb{Z}[\xi']$;

(f) $\mathbb{Q}[\xi] = \mathbb{Q}[\xi']$.

2. Legyen p prímszám. Mutassuk meg, hogy $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}) : \mathbb{Q}] = 2$.

3. Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}$ bővítés fokát.

4. Legyen p és q különböző prímszámok. Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ bővítés fokát.

5. Legyenek $p_1, \dots, p_n$ páronként különböző prímszámok. Mutassuk meg, hogy $\sqrt{p_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$. Így $[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})] = 2$ és $[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$.

6. Legyenek K és L olyan testek, amelyekre $L : K$ teljesül és $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Legyenek u és v az L test olyan elemei, amelyekre u^2 és v^2 a K test különböző elemei. Mutassuk meg, hogy $K(u, v) = K(u + v)$.

7. Tegyük fel, hogy $[L : K]$ prímszám. Mik lesznek az $L : K$ bővítés közbülső testei?

8. Tegyük fel, hogy K_1 és K_2 az $L : K$ bővítés olyan közbülső testei, amelyekre $L = K(K_1, K_2)$. Mutassuk meg, hogy $[L : K] \leqslant [K_1 : K] \cdot [K_2 : K]$.

9. Mutassuk meg, hogy az $f = x^3 + 3x + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ az f polinom gyöke. Fejezzük ki az α^{-1} és $(1+\alpha)^{-1}$ elemeket az 1, α és α^2 elemek racionális együtthatós lineáris kombinációjaként.

10. Tegyük fel, hogy $L(\alpha) : L$, $L : K$ teljesül és $[K(\alpha) : K]$, $[L : K]$ relatív prímek. Mutassuk meg, hogy $m_{\alpha,L} \in K[x]$.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha $[L : K]$ prímszám, akkor az $L : K$ bővítés egyszerű.

12. Az $L : K$ tesbővítésre teljesül, hogy $L = K(u, v)$, ahol $u, v \in L$ és

$$\text{ln.k.o.}(\text{gr}_K(u), \text{gr}_K(v)) = 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy $[L : K] = \text{gr}_K(u) \cdot \text{gr}_K(v)$.

13. Legyen L a K test bővítése. Mutassuk meg, hogy ha az $u \in L$ elemre $[K(u) : K]$ páratlan, akkor $K(u^2) = K(u)$.

14. Legyen K megszámlálhatóan végtelen test és $L : K$ algebrai bővítés. Mutassuk meg, hogy L is megszámlálhatóan végtelen. Mutassuk meg, hogy vannak olyan valós számok, amelyek transzcendensek a racionális számok teste felett.

15. Legyen $L : K$ bővítés, $\alpha \in L$ transzcendens elem K felett és $f \in K[x]$ nem konstans polinom. Mutassuk meg, hogy

(a) $f(\alpha)$ transzcendens K felett;

(b) ha $\beta \in L$-re $f(\beta) = \alpha$ teljesül, akkor β is transzcendens K felett.

16. Legyenek a és b olyan komplex számok, amely transzcendensek $\mathbb{Q}$ felett. Igaz-e, hogy a^b is transzcendens $\mathbb{Q}$ felett?

17. Tegyük fel, hogy $K(\alpha, \beta) : K$ olyan bővítést, ahol $\alpha \notin K$ algebrai elem K felett, míg β transzcendens. Mutassuk meg, hogy $K(\alpha, \beta) : K$ nem egyszerű.

18. Tegyük fel, hogy $L : K$ algebrai bővítés, és legyen $\tau \colon L \to L$ olyan injektív homomorfizmus, amelyre $\tau(\alpha) = \alpha$ teljesül tetszőleges $\alpha \in K$ esetén. Mutassuk meg, hogy τ izomorfizmus.

19. Tegyük fel, hogy α transzcendens elem K felett. Mutassuk meg, hogy ha $\beta \in K(\alpha) \setminus K$, akkor $K(\alpha) : K(\beta)$ bővítés véges és β transzcendens K felett. Ha $\beta = f(\alpha)/g(\alpha)$ ($f, g \in K[x]$, ln.k.o.$(f, g) \sim 1$), akkor $[K(\alpha) : K(\beta)] = \max(f^*, g^*)$.

20. Legyenek K olyan test, melynek karakterisztkája nem 2, valamint tegyük fel, hogy az L testre $[L : K] = 2$ teljesül. Legyen

$$S(L) = \left\{ a \in K^\times \mid a \text{ egy } L\text{-beli elem négyzete} \right\}.$$

Mutassuk meg, hogy $S(L)$ részcsoport $K^\times$-ban.[1]

21. Legyenek L, L' és K olyan testek, amelyekre $\operatorname{char}(K) \neq 2$ és $[L:K] = [L':K] = 2$ teljesül. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor van olyan $\varphi\colon L \to L'$ izomorfizmus, amely fixen hagyja K elemeit, ha $S(L) = S(L')$.

22. Legyenek p páratlan prímszám. Mutassuk meg, hogy izomorfiától eltekintve egyetlen p^2-elemű test van.

Irreducibilis polinomok

23. Legyen $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ legalább elsőfokú, primitív polinom. Ha létezik olyan p prímszám, amelyre $p \mid a_1, \ldots, a_n$, de $p \nmid a_0$ és $p^2 \nmid a_n$, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

24. Mutassuk meg, hogy van olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$ irreducibilis főpolinom, hogy az $f_{\to s}$ polinomok ($s \in \mathbb{Z}$) egyikére sem alkalmazható a Schönemann–Eisenstein-tétel.

25. Mutassuk meg, hogy tetszőleges p prímszámra az $x^n - p$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben.

26. Bizonyítsuk be, hogy $[\mathbb{A} \cap \mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$.

27. Legyen $H = \left\{ \sqrt[p]{2} \mid p \text{ prímszám} \right\}$. Mutassuk meg, hogy ha H' véges részhalmaza H-nak, akkor a H'-beli elemek lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.

28. Igazoljuk, hogy az

(a) $x^5 - 4x + 2$,

(b) $x^4 - 4x + 2$

polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}(i)$ felett.

29. Legyen p tetszőleges prímszám. Mutassuk meg, hogy az $x^p + x^{p-1} + \cdots + x + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.

30. Legyen $\vartheta = \dfrac{2\pi}{7}$. Határozzuk meg a $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$ és a $2\cos\vartheta$ komplex számok minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett.

31. Ha egy n-edfokú $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom ($n \geqslant 1$) legalább $2\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ egész helyen ± 1 értéket vesz fel, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ (s így $\mathbb{Q}$) felett.

32. Igazoljuk, hogy az

[1] Tetszőleges L testre $L^\times$ jelöli a test multiplikatív csoportját, azaz $L^\times = (L \setminus \{0\}; \cdot)$.

(a) $x^5+9x^4+30x^3+2x+3$,

(b) x^n-px+p^2 (p prímszám, $n>3$)

polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}$ felett.

33. Legyen n természetes szám. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\in\mathbb{Q}[x]$ polinom irreducibilis.

34. Legyen p prímszám és a olyan egész szám, amely nem osztható p-vel. Mutassuk meg, hogy az x^p-x+a polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

35. Legyenek a és b tetszőleges egész számok. Ekkor az $f=x^4+\overline{a}x^2+\overline{b}^2$ polinom nem irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett (p tetszőleges prímszám).

36. Legyen $g\in\mathbb{Z}[x]$ tetszőleges k-adfokú polinom ($k\in\mathbb{N}$), és legyenek $d_0<d_1<\cdots<d_k$ egészek. Igazoljuk, hogy van olyan $i\in\{0,1,\ldots,k\}$, amelyre $|g(d_i)|\geqslant k!/2^k$.

37. Legyen $f\in\mathbb{Z}[x]$ tetszőleges n-edfokú polinom ($n\in\mathbb{N}$), és legyen $m=[(n+1)/2]$. Tegyük fel, hogy vannak olyan különböző $a_1,\ldots,a_n$ egészek, amelyekre $0<|f(a_i)|<m!/2^m$. Ekkor az f polinom irreducibilis.

38. Legyen $f=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+\varepsilon p\in\mathbb{Z}[x]$, ahol $\varepsilon\in\{-1,1\}$ és p prímszám. Ha $p>1+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|$, akkor f irreducibilis.