Beadható feladatok

1. Tetszőleges n természetes számra legyen

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Mutassa meg, hogy az f_n polinom irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett ($n \in \mathbb{N}$).

2. Legyen n tetszőleges természetes szám és legyenek $p_1, \ldots, p_n$ páronként különböző prímszámok. Igaz-e, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1} + \cdots + \sqrt{p_n})$?

3. Legyen $\beta = \sqrt[3]{2}e^{2\pi/3}$. Igazolja, hogy a -1 komplex szám nem állítható elő $\mathbb{Q}(\beta)$-beli elemek négyzeteinek összegeként.

4. Legyenek p és q tetszőleges racionális számok. Legyenek α_1, α_2 és α_3 az $f = x^3 + px + q$ $\mathbb{Q}$ feletti polinom komplex gyökei. Állítsa elő az $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 + \alpha_3^7$ kifejezést p és q polinomjaként.

5. Tetszőleges $d \mid 4!$-hoz konstruáljunk olyan 4-edfokú $f_d \in \mathbb{Q}[x]$ polinomot, amelyre $[K_d : \mathbb{Q}] = d$ teljesül, ahol K_d az f_d polinom egyik felbontási teste $\mathbb{Q}$ felett.

6. Legyen K olyan test, amelyre $\mathrm{char}(K) = p > 0$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy ha az L test olyan véges bővítése K-nak, amelyre $p \nmid [L : K]$, akkor az $L : K$ bővítés szeparábilis algebrai bővítés.

7. Legyen K olyan test, amelyre $\mathrm{char}(K) = p > 0$ teljesül. Mutassa meg, hogy

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} K^{p^k}.$$

a K test legbővebb tökéletes résztestе.

8. Legyen $K = \mathbb{F}_p(t, w)$ és $f = (x^p - t)(x^p - w) \in K[x]$. Bizonyítsuk be a következőket.

(a) Az $x^p - t$ és $x^p - w$ polinom irreducibilisek K felett.

(b) Ha L az f polinom egyik felbontási teste K felett, akkor $[L : K] = p^2$.

(c) Bármely $a \in L$-re $a^p \in K$ teljesül.

9. Legyen $q = p^n$, ahol p prímszám és n természetes szám, valamint legyen $K = \mathbb{F}_q$. Jelölje H a K felett irreducibilis főpolinomok halmazát és definiáljuk a Z leképezést a következőképpen:

$$\mathbb{Z}(t) = \frac{1}{1-t} \prod_{f \in H} \frac{1}{1 - t^{f^*}}.$$

Határozza meg Z-t.

10. Igazolja, hogy

$$\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(x^p - 2) \cong \left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_p,\ a \neq 0 \right\} ; \cdot \right).$$

11. Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ olyan 4-edfokú polinom, melynek Galois-csoportja izomorf S_4-gyel, valamint legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ az f polinom tetszőleges komplex gyöke. Határozza meg a $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ bővítés közbülső testeit.

12. Bizonyítsa be, hogy az $x^4 + ax^2 + b \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibilis polinom Galois-csoportja izomorf D_4 egy részcsoportjával.

13. Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$ egészekre legyen $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a + b\sqrt{c}})$. Adjon szükséges és elegendő feltételt az a, b, c egészekre úgy, hogy a $K : \mathbb{Q}$ bővítés Galois-bővítés legyen, melynek Galois-csoportja izomorf $\mathbb{Z}_4$-gyel.

14. Legyen $\varepsilon_7 = \cos\frac{2\pi}{7} + i \sin\frac{2\pi}{7}$. Határozza meg az $\varepsilon_7 + \varepsilon_7^5$ és $\varepsilon_7 + \varepsilon_7^5 + \varepsilon_7^8$ komplex számok fokát $\mathbb{Q}$ felett.

15. Mutassa meg, hogy tetszőleges m egész számhoz van olyan n természetes szám, amelyre $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}(e^{2i\pi/n})$.

16. Tetszőleges a racionális számra legyen $G_a = \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(x^4 + x^3 + x^2 + x + a)$. Adjon meg olyan a_1, a_2, a_3, a_4 racionális számokat, amelyekre $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 4)$ esetén $G_{a_i} \not\cong G_{a_j}$ teljesül.

17. Legyen L a racionális számtest véges bővítése. Mutassa meg, hogy a

$$\left\{\beta \in L \mid \beta^k = 1 \text{ valamely } k \in \mathbb{N}_0\text{-ra}\right\}$$

halmaz véges.

18. Mutassa meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{7}) \ncong \mathbb{Q}(\sqrt{11})$.

19. Legyen $L : K$ olyan Galois-bővítés, amelynek foka $5^3 \cdot 43^2$. Mutassa meg, hogy az $L : K$ bővítésnek vannak olyan M_1, M_2 közbülső testei, amelyekre teljesülnek a következők:

- az $M_1 : K$ és $M_2 : K$ bővítések Galois-bővítések,
- $M_1 \cap M_2 = K$ és
- $M_1 M_2 = L$.

20. Legyen p tetszőleges prímszám. Határozzuk meg az $x^5 - 5p^4 x + p$ polinom Galois-csoportját $\mathbb{Q}$ felett.