Testelmélet és Galois-elmélet

Egyéb érdekességek

2009. május 15.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Tétel.

Legyen az L test a K test bővítése, $\alpha \in L$ transzcendens elem K felett. Ekkor az $\varepsilon_\alpha \colon K[x] \to K(\alpha)$ leképezés egyértelműen kiterjeszthető egy $K(x) \to K(\alpha)$ izomorfizmussá.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Definíció: algebrai függetlenség.

Legyen az L test a K test bővítése, $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq L$. Azt mondjuk, hogy A **algebrailag független** K **felett**, ha a

$$\varepsilon_A\colon K[x_1, \ldots, x_n] \to K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ f \mapsto f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

leképezés injektív. Az L test S részhalmaza algebrailag független K felett, ha S minden véges részhalmaza algebrailag független.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Definíció: algebrai függetlenség.

Legyen az L test a K test bővítése, $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq L$. Azt mondjuk, hogy A **algebrailag független** K **felett**, ha a

$$\varepsilon_A \colon K[x_1, \ldots, x_n] \to K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ f \mapsto f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

leképezés injektív. Az L test S részhalmaza algebrailag független K felett, ha S minden véges részhalmaza algebrailag független.

Tétel.

Legyen az L test a K test bővítése, $A \subseteq L$ n-elemű algebrailag független részhalmaz. Ekkor az ε_A leképezés egyértelműen kiterjeszthető egy $K(x_1, \ldots, x_n) \to K(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ izomorfizmussá.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Definíció: transzcendencia bázis.

Legyen az L test a K test bővítése,
$\mathcal{T} = \{S \subseteq L \mid S \text{ algebrailag független } K \text{ felett}\}$. Azt mondjuk, hogy az $S \subseteq L$ **transzcendencia bázisa** L**-nek** K **felett**, ha S maximális eleme az $(\mathcal{T}; \subseteq)$ részbenrendezett halmaznak.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Definíció: transzcendencia bázis.

Legyen az L test a K test bővítése,
$\mathcal{T} = \{S \subseteq L \mid S$ algebrailag független K felett$\}$. Azt mondjuk, hogy az $S \subseteq L$ **transzcendencia bázisa** L**-nek** K **felett**, ha S maximális eleme az $(\mathcal{T}; \subseteq)$ részbenrendezett halmaznak.

Tétel.

Legyen az L test a K test bővítése.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Definíció: transzcendencia bázis.

Legyen az L test a K test bővítése, $\mathcal{T} = \{S \subseteq L \mid S$ algebrailag független K felett$\}$. Azt mondjuk, hogy az $S \subseteq L$ **transzcendencia bázisa** L**-nek** K **felett**, ha S maximális eleme az $(\mathcal{T}; \subseteq)$ részbenrendezett halmaznak.

Tétel.

Legyen az L test a K test bővítése.

(a) Az $S \subseteq L$ részhalmaz pontosan akkor transzcendencia bázisa L-nek K felett, ha S algebrailag független K felett és $L : K(S)$ algebrai.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Definíció: transzcendencia bázis.

Legyen az L test a K test bővítése,
$\mathcal{T} = \{S \subseteq L \mid S$ algebrailag független K felett$\}$. Azt mondjuk, hogy az $S \subseteq L$ **transzcendencia bázisa** L**-nek** K **felett**, ha S maximális eleme az $(\mathcal{T}; \subseteq)$ részbenrendezett halmaznak.

Tétel.

Legyen az L test a K test bővítése.

(a) Az $S \subseteq L$ részhalmaz pontosan akkor transzcendencia bázisa L-nek K felett, ha S algebrailag független K felett és $L : K(S)$ algebrai.

(b) Ha $A \subseteq L$ olyan részhalmaz, amelyre $L : K(A)$ algebrai, és $C \subseteq A$ az L test algebrailag független részhalmaza K felett, akkor van olyan B transzcendencia bázisa L-nek K felett, amelyre $C \subseteq B \subseteq A$ teljesül.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Tétel.

Legyen az L test a K test bővítése, az r-elemű $C = \{c_1, \dots, c_r\} \subseteq L$ részhalmaz algebrailag független és az s-elemű $A = \{a_1, \dots, a_s\} \subseteq L$ részhalmaz olyan, hogy $L : K(A)$ algebrai. Ekkor $r \leqslant s$ és van olyan s-elemű $C \subseteq D \subseteq A \cup C$ halmaz, amelyre $L : K(D)$ algebrai.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Tétel.

Legyen az L test a K test bővítése, az r-elemű $C = \{c_1, \dots, c_r\} \subseteq L$ részhalmaz algebrailag független és az s-elemű $A = \{a_1, \dots, a_s\} \subseteq L$ részhalmaz olyan, hogy $L : K(A)$ algebrai. Ekkor $r \leqslant s$ és van olyan s-elemű $C \subseteq D \subseteq A \cup C$ halmaz, amelyre $L : K(D)$ algebrai.

Következmény.

Legyen az L test a K test bővítése, S és T transzcendencia bázisai L-nek K felett. Ekkor $|S|, |T| \geqslant \aleph_0$ vagy $|S| = |T| < \aleph_0$.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Tétel.

Legyen az L test a K test bővítése, az r-elemű $C = \{c_1, \ldots, c_r\} \subseteq L$ részhalmaz algebrailag független és az s-elemű $A = \{a_1, \ldots, a_s\} \subseteq L$ részhalmaz olyan, hogy $L : K(A)$ algebrai. Ekkor $r \leqslant s$ és van olyan s-elemű $C \subseteq D \subseteq A \cup C$ halmaz, amelyre $L : K(D)$ algebrai.

Következmény.

Legyen az L test a K test bővítése, S és T transzcendencia bázisai L-nek K felett. Ekkor $|S|, |T| \geqslant \aleph_0$ vagy $|S| = |T| < \aleph_0$.

Definíció: transzcendencia fok

Ha az $L : K$ testbővítésnek van egy S véges transzcendencia bázisa, akkor $L : K$ **transzcendencia foka** $|S|$, különben ∞.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Tétel.

Legyenek K, L és M testek, amelyekre $L : K$ és $M : L$ teljesül. Ha $A \subseteq L$ algebrailag független K felett és $B \subseteq M$ algebrailag független L felett, akkor $A \cup B$ algebrailag független K felett.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Tétel.

Legyenek K, L és M testek, amelyekre $L : K$ és $M : L$ teljesül. Ha $A \subseteq L$ algebrailag független K felett és $B \subseteq M$ algebrailag független L felett, akkor $A \cup B$ algebrailag független K felett.

Tétel.

Legyenek K, L és M testek, amelyekre $L : K$ és $M : L$ teljesül. Ha A transzcendencia bázis L-nek K felett és B transzcendencia bázisa M-nek L felett, akkor $A \cup B$ transzcendencia bázisa M-nek K felett.

Transzcendens elemek és algebrai függetlenség.

Tétel.

Legyenek K, L és M testek, amelyekre $L : K$ és $M : L$ teljesül. Ha $A \subseteq L$ algebrailag független K felett és $B \subseteq M$ algebrailag független L felett, akkor $A \cup B$ algebrailag független K felett.

Tétel.

Legyenek K, L és M testek, amelyekre $L : K$ és $M : L$ teljesül. Ha A transzcendencia bázis L-nek K felett és B transzcendencia bázisa M-nek L felett, akkor $A \cup B$ transzcendencia bázisa M-nek K felett.

Tétel.

Legyenek K, L és M testek, amelyekre $L : K$ és $M : L$ teljesül. Ekkor az $M : K$ bővítés transzcendencia foka az $L : K$ és $M : L$ bővítések transzcendencia fokának összege.

Lüroth tétele.

Legyenek K, L és M testek, amelyekre $L : K$ és $M : L$ teljesül. Ha $A \subseteq L$ algebrailag független K felett és $B \subseteq M$ algebrailag független L felett, akkor $A \cup B$ algebrailag független K felett.

Általános polinomok.

Legyen K test és $K(a_1,\dots,a_n):K$ olyan testbővítés, hogy $\{a_1,\dots,a_n\}$ algebrailag független K felett. Ekkor az

$$x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n \in K(a_1,\dots,a_n)[x]$$

polinomot K **feletti általános n-edfokú (fő)polinomnak** nevezzük.

Tétel.

A K test feletti általános n-edfokú

$$x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n \in K(a_1,\dots,a_n)[x]$$

polinom irreducibilis és szeparábilis $K(a_1,\dots,a_n)$ felett, és a Galois-csoportja izomorf S_n-nel. Ezért pontosan akkor oldható meg radikálokkal, ha $n \leqslant 4$.

Általános polinomok.

Tétel (Ruffini–Abel-tétel).

A $\mathbb{Q}$ test feletti általános n-edfokú

$$x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n \in \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n)[x]$$

polinomra nem létezik gyökkiefejezés.

Polinom Galois-csoportjának meghatározása.

Legyen K test, $f = x^n - a_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n \in K[x]$. Tegyük fel, hogy f gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ páronként különbözőek valamely L felbontási testében. Legyen $\beta = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, valamint tetszőleges $\pi \in S_n$-re legyen

$$\pi_x(\beta) = \alpha_1 x_{\pi(1)} + \cdots + \alpha_n x_{\pi(n)},$$
$$\pi_\alpha(\beta) = \alpha_{\pi(1)} x_1 + \cdots + \alpha_{\pi(n)} x_n = (\pi^{-1})_x(\beta).$$

Tekintsük az $F = \prod_{\pi \in S_n}(y - \pi_x(\beta)) \in K[y, x_1, \ldots, x_n]$ polinomot, melynek irreducibilis felbontása $K[y, x_1, \ldots, x_n]$-ben: $F = F_1 \cdots F_k$. Ekkor tetszőleges j-re $(1 \leqslant j \leqslant k)$ $L[y, x_1, \ldots, x_n]$-ben F_j felírható $F_j = \prod_{\pi \in A_j}(y - \pi_x(\beta))$ alakban, ahol $A_1, \ldots, A_k$ az S_n halmaz egy alkalmas particiója. Szükség esetén az indexek cseréjével elérhető, hogy $\mathrm{id} \in A_1$.

Polinom Galois-csoportjának meghatározása.

Mivel $F = \pi_x F = (\pi_x F_1) \cdots (\pi_x F_k)$, ezért π permutálja az F polinom irreducibilis tényezőit. Legyen $G = \{\pi \in S_n \mid \pi_x F_1 = F_1\}$.

Tétel.

$G \cong \mathrm{Gal}_K(f)$.

Polinom Galois-csoportjának meghatározása.

Mivel $F = \pi_x F = (\pi_x F_1) \cdots (\pi_x F_k)$, ezért π permutálja az F polinom irreducibilis tényezőit. Legyen $G = \{\pi \in S_n \mid \pi_x F_1 = F_1\}$.

Tétel.

$G \cong \mathrm{Gal}_K(f)$.

Tétel.

Legyen f egy $\mathbb{Z}[x]$-beli főpolinom, p prímszám. Ha az f gyökei páronként különbözőek egy L felbontási testében, akkor $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Z}_p}(\overline{f})$ ciklikus csoport izomorf $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ egy részcsoportjával.