
8. FELADATSOR

Szállítási feladat

Probléma: Adott n darab feladóhely és m darab felvevőhely. Feladatunk az, hogy szállítsuk el a felvevő helyeken lévő anyagot a kívánt mennyiségben a felvevőhelyekre úgy, hogy a szállítással kapcsolatos költségek összege minimális legyen.

Jelölések:

- $n \in \mathbb{N}$ a feladóhelyek száma, egy-egy feladóhelyen azonos anyagféleség áll rendelkezésünkre,
- a_i az i -edik feladóhelyen lévő anyag mennyisége,
- $m \in \mathbb{N}$ a felvevőhelyek száma,
- $C = (c_{i,j})_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ahol $c_{i,j}$ az egységnyi anyagmennyiségnek a szállítási költsége, ha a szállítás az i -edik feladóhelyről a j -edik felvevőhelyre ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$), a C mátrix a **költségmátrix**,
- $X = (x_{i,j})_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ahol $x_{i,j}$ az i -edik feladóhelyről a j -edik felvevőhelyre szállítandó anyagmennyiséget jelöli. ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$).

Ekkor a fenti probléma a következőképpen formalizálható:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^m x_{i,t} &= a_i \quad (i = 1, \dots, n) \\ \sum_{t=1}^n x_{t,j} &= b_j \quad (j = 1, \dots, m) \\ x_{i,j} &\geq 0 \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{i,j} x_{i,j} &\rightarrow \min \end{aligned}$$

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ és $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, ekkor a fenti feladatot $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ -vel jelöljük.

1. Legyenek m és n tetszőleges természetes számok, a tetszőleges valós szám, valamint legyen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

és E_n az $n \times n$ -es egységmátrix. Tekintsük az alábbi $A \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (mn)}$ mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{1}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{1}^T \\ E_n & E_n & E_n & \dots & E_n \end{pmatrix}.$$

Igazoljuk a következőket.

- (a) Az A mátrix rangja $m + n - 1$.
- (b) Legyen $1 \leq r \leq m + n$ tetszőleges természetes szám. Tegyük fel, hogy $1 \leq u < u + r - 1 \leq m + n$ és $1 \leq v < v + r - 1 \leq m + n$ ($u, v \in \mathbb{N}$), valamint legyen $b_{i,j} = A_{u+i-1, v+j-1}$ ($1 \leq i, j \leq r$). Mutassuk meg, hogy a $\det(b_{i,j})_{r \times r} \in \{-1, 0, 1\}$.
- (c) tekintsük az A mátrix $m + n - 1$ számú független oszlopát. Az ezen oszlopvektorokból alkotott $B \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n-1)}$ mátrix bármely sorának elhagyásával kapott mátrix determinánusa nem 0.

2. Legyen $m = 5$, $n = 6$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és

$$H = \{(i, j) \in A \times B \mid \text{ln.k.o.}(i, j) < |i - j|\}.$$

Rajzoljuk fel a H -hoz tartozó cellagráfot és páros gráfot.

3. Legyen G egy cellagráf. Tekintsük G celláinak egy c_1, \dots, c_k rendszere, valamint legyen $\{e_1, \dots, e_k\}$ a celláknak megfelelő élek rendszere $BP(G)$ -ben.¹ Igazoljuk, hogy a $(c_1, c_2), (c_2, c_3), \dots, (c_{k-1}, c_k)$ élek rendszere a cellagráfban út [egyszerű út/hurok/egyszerű hurok], ha az e_1, \dots, e_k élek rendszere $BP(G)$ -ben út [egyszerű út/hurok/egyszerű hurok].

¹A G cellagráfhoz tartozó páros gráfot $BP(G)$ jelöli.

4. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^T &= (4, 5), \\ \mathbf{b}^T &= (3, 3, 3), \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5. Oldjuk meg az $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, C)$ szállítási feladatot, ahol

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^T &= (25, 26, 27, 32), \\ \mathbf{b}^T &= (10, 20, 30, 30, 20), \\ C &= \begin{pmatrix} 9 & 13 & 8 & 5 & 13 \\ 8 & 22 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 7 & 11 & 17 & 4 \\ 15 & 18 & 5 & 20 & 19 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

6. Határozzunk meg olyan vonalrendszert, amely az alábbi mátrix valamennyi 0-ját tartalmazza:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & * & * & * & * \\ * & 0 & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Sándor, József és Benedek egy-egy aszisztenst keresnek az utóbbi időben megnövekedett feladatok ellátására. Az meghírdetett interjúra öten jelentkeznek: Anna, Hanna, Panna, Bözsi és Pirike. Bizonyos okok miatt Sándor nem szeretne Pannával, Benedek pedig Pirikével együtt dolgozni. Az egyes munkákat az alábbi hatékonysággal tudnák a hölgyek végezni:

	Sándor	József	Benedek
Anna	11	8	13
Hanna	7	14	6
Panna	6	10	15
Bözsi	20	5	12
Pirike	9	9	18

8. Igazoljuk, hogy $m \times n$ -es szállítási feladat esetén az összes különböző báziscella-rendszerek száma $m^{n-1}n^{m-1}$.

9. Legyen $A \in \{0, 1\}^{m \times n}$ olyan mátrix, amely minden oszlopában pontosan két egyest tartalmaz és sorai két csoportba sorolhatók oly módon, hogy minden oszlop egyesei különböző csoportba tartozó sorokban vannak. Igazoljuk, hogy A unimodális, azaz minden négyzetes részének determinánsa $-1, 0$ vagy 1 .

10. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix permutációmátrix, ha minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-est tartalmaz és a többi elem 0 . Bizonyítsuk be, hogy az összes permutáció-mátrixok mint vektorok által kifeszített altér dimenziója $(n - 1)^2 + 1$.

11. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan mátrix, amelynek minden sorában és minden oszlopában pontosan r darab 1-est tartalmaz és a többi elem 0 . Bizonyítsuk be, hogy A előáll r darab permutációmátrix összegeként.