1. Feladatsor

Mátrixaritmetika

Teteszőleges $n \in \mathbb{N}$-re és $1 \leqslant k \leqslant n$-re legyen

$$\begin{aligned} e_{k,n} &= (0 \quad \dots \quad 0 \quad \overbrace{\quad 1 \quad}^{k\text{-adik komp.}} \quad 0 \quad \dots \quad 0) \in \mathbb{R}^{1\times n}, \\ \mathbf{1}_n &= (1 \quad \dots \quad 1) \in \mathbb{R}^{1\times n}. \end{aligned}$$

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az alábbi műveletek eredményeit: $A \cdot B$, $B \cdot C$, $(A^T \cdot C^T)^T$ és $A - C^T \cdot B^T$.

2. Legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 5 \\ -5 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Igaz-e, hogy A és B egymás inverzei?

(b) Adja meg az $A \cdot X = C^T$ egyenlet megoldásait.

3. Milyen p és q valós számok esetén lesz az $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 7 & p \\ 2 & -4 & 8 & q \end{pmatrix}$ mátrix rangja $r \in \{1, 2, 3, 4\}$?

4. Egy országgyűlési választáson a tizenöt szavazókörzetben hat jelöltre lehet szavazni. Az érvényes szavazatok megoszlását az $A = (a_{i,j})_{6\times 15}$ mátrix tartalmazza, amelynek $a_{i,j}$ eleme azt mutatja meg, hogy az i-edik jelöltre a j-edik körzetben hányan szavaztak. Mit jelentenek a következő kifejezések:

(a) $e_{1,6} \cdot A \cdot \mathbf{1}_{15}^T$;

(b) $\mathbf{1}_6 \cdot A \cdot e_{5,15}^T$.

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy a második jelöltre a hatodik körzetben leadott szavazatok száma hány százaléka az összes érvényes szavazatnak.

5. Egy áruházban tizenkét féle dobozos sört tartanak. 2008. júliusában regisztrálták a napi fogyást: az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme azt jelenti, hogy 2008. júliusának i-edik napján hány darab fogyott a j-edik fajta sörből. A b (sör)vektor a sörök egységárait tartalmazza. Milyen jelentést tulajdoníthatunk az alábbi kifejezéseknek?

(a) $e_{3,31} \cdot A \cdot b^T$;

(b) $\mathbf{1}_{31} \cdot A$;

(c) $A \cdot \mathbf{1}_{12}$.

Írja fel mátrixaritmetikai jelölésekkel, hogy mennyi az ötödik fajta sör árbevétele egy hónap alatt.

6. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Adja meg az $(A + B^{-1}) \cdot A^T$ mátrixot és oldja meg a $B \cdot X = A$ mátrixegyenletet.

7. Adjuk meg a p valós szám értékét úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & p \end{pmatrix}$$

mátrix szinguláris legyen.

8. Adjuk meg a p valós szám értékét úgy, hogy a $b = (1, 1, p)$ vektor előálljon az

$$a_1 = (1, 2, 3), \quad a_2 = (-2, -5, -5), \quad a_3 = (0, -1, 1), \quad \text{és} \quad a_4 = (-2, -6, -4)$$

vektorok lineáris kombinációjaként.

9. Határozzuk meg mindazokat a p valós számokat, amelyekre az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ p & p & p+2 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható.