Diszkrét matematika III.

Lineáris egyenletrendszerek

2009. május 15-16.

Lineáris egyenletrendszerek.

Definíció: lineáris egyenletrendszer.

Legyen K tetszőleges test, $a_{i,j} \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, $b_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Ekkor az

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

egyenletrendszert **(K feletti) lineáris egyenletrendszernek** nevezzük. A $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ elem n-es megoldása az (1) egyenletrendszernek, ha K-ban teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$a_{i,1}c_1 + \cdots + a_{i,n}c_n = b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

Lineáris egyenletrendszerek.

Definíció: lineáris egyenletrendszer mátrixa.

Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

mátrixot az (1) **lineáris egyenletrendszer mátrixának** nevezzük.

Legyen $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ és $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Ekkor az (1) **lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja** a következő: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Ekkor a $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in K^{n \times 1}$ vektor megoldása az egyenletnek, ha $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$.
Jelölje $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ az A mátrix oszlopvektorait, ekkor (1) vektoros alakja: $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$.

Definíció: lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixa.

Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n \, \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$$

mátrixot az (1) **lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixának** nevezzük, és $r(A \,|\, \mathbf{b})$-vel jelöljük.

Definíció: lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixa.

Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1 \; \dots \; \mathbf{a}_n \, \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$$

mátrixot az (1) **lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixának** nevezzük, és $r(A \,|\, \mathbf{b})$-vel jelöljük.

Kronecker–Capelli-tétel.

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha $r(A) = r(A \,|\, \mathbf{b})$.

Definíció: szabályos lineáris egyenletrendszer.

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer ($A \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^{m\times 1}$) **szabályos**, ha $m = n$ és $\det(A) \neq 0$.

Definíció: szabályos lineáris egyenletrendszer.

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer ($A \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^{m\times 1}$) **szabályos**, ha $m = n$ és $\det(A) \neq 0$.

Tétel (Cramer-szabály).

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ szabályos lineáris egyenletrendszernek ($A \in K^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in K^{n\times 1}$) pontosan egy megoldása van: $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$, ahol

$$c_i = \frac{\det(\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_{i-1}\, \mathbf{b}\, \mathbf{a}_{i+1} \ \ldots \ \mathbf{a}_n)}{\det(\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_{i-1}\, \mathbf{a}_i\, \mathbf{a}_{i+1} \ \ldots \ \mathbf{a}_n)}$$

($\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ rendre az A mátrix oszlopvektorai).

Tegyük fel, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek ($A \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^{m\times 1}$) megoldható, azaz a Kronecker–Capelli-tétel szerint $r := r(A) = r(A\,|\,\mathbf{b})$. Mivel $r(A) = r_d(A)$, ezért az A mátrixból kiválasztható egy $r \times r$-es nem eltűnő aldetermináns. A mátrix sorainak cseréjével és az ismeretlenek átindexelésével elérhető, hogy

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ekkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{r,1}x_1 + \dots + a_{r,n}x_n &= b_r \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerrel.

Tetszőlegesen rögzített $c_{r+1}, \ldots, c_n \in K$ esetén az

$$
\begin{gathered}
a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}c_{r+1} - \cdots - a_{1,n}c_n \\
\vdots \\
a_{r,1}x_1 + \cdots + a_{r,n}x_r = b_r - a_{r,r+1}c_{r+1} - \cdots - a_{r,n}c_n
\end{gathered}
$$

lineáris egyenletrendszernek a Cramer-szabály miatt pontosan egy megoldása van.

Tétel.

Legyen $A \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^{m \times 1}$. Ekkor igazak a következők:

Tétel.

Legyen $A \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^{m\times 1}$. Ekkor igazak a következők:

(a) ha $r(A) < r(A\,|\,\mathbf{b})$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása;

Tétel.

Legyen $A \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^{m\times 1}$. Ekkor igazak a következők:

(a) ha $r(A) < r(A\,|\,\mathbf{b})$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása;

(b) ha $r(A) = r(A\,|\,\mathbf{b}) = r$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek van megoldása, és az általános megoldásban $(n - r)$ darab szabadon választható paraméter van.

Definíció: homogén lineáris egyenletrendszer.

Legyen $A \in K^{m \times n}$. Az

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

lineáris egyenletrendszert **homogén lineáris egyenletrendszernek** nevezzük. Bármely homogén lineáris egyenletrendszernek megoldása a $\mathbf{c} = \mathbf{0} \in K^n$ vektor, ez a megoldás az egyenletrendszer **triviális megoldása**.

Definíció: homogén lineáris egyenletrendszer.

Legyen $A \in K^{m \times n}$. Az

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

lineáris egyenletrendszert **homogén lineáris egyenletrendszernek** nevezzük. Bármely homogén lineáris egyenletrendszernek megoldása a $\mathbf{c} = \mathbf{0} \in K^n$ vektor, ez a megoldás az egyenletrendszer **triviális megoldása**.

Következmény.

A (2) homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $r(A) < n$.

Tétel.

Legyen $A \in K^{m \times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak K^n-ben, amelynek dimenziója $n - r(A)$.

Tétel.

Legyen $A \in K^{m \times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak K^n-ben, amelynek dimenziója $n - r(A)$.

Bizonyítás.

Legyen $U = \{\mathbf{c} \in K^n \mid A\mathbf{c} = \mathbf{0}\}$. Ekkor U altér, mivel

Tétel.

Legyen $A \in K^{m \times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak K^n-ben, amelynek dimenziója $n - r(A)$.

Bizonyítás.

Legyen $U = \{\mathbf{c} \in K^n \mid A\mathbf{c} = \mathbf{0}\}$. Ekkor U altér, mivel

- $\mathbf{0} \in U$,

Tétel.

Legyen $A \in K^{m\times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak K^n-ben, amelynek dimenziója $n - r(A)$.

Bizonyítás.

Legyen $U = \{\mathbf{c} \in K^n \mid A\mathbf{c} = \mathbf{0}\}$. Ekkor U altér, mivel

- $\mathbf{0} \in U$,
- ha $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in U$, azaz $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ és $A\mathbf{c}' = \mathbf{0}$, akkor $A(\mathbf{c} + \mathbf{c}') = A\mathbf{c} + A\mathbf{c}' = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{c} + \mathbf{c}' \in U$,

Tétel.

Legyen $A \in K^{m \times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak K^n-ben, amelynek dimenziója $n - r(A)$.

Bizonyítás.

Legyen $U = \{\mathbf{c} \in K^n \mid A\mathbf{c} = \mathbf{0}\}$. Ekkor U altér, mivel

- $\mathbf{0} \in U$,
- ha $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in U$, azaz $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ és $A\mathbf{c}' = \mathbf{0}$, akkor $A(\mathbf{c} + \mathbf{c}') = A\mathbf{c} + A\mathbf{c}' = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{c} + \mathbf{c}' \in U$,
- ha $\alpha \in K$ és $\mathbf{c} \in U$, azaz $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, akkor $A(\alpha \cdot \mathbf{c}) = \alpha \cdot A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, azaz $\alpha \cdot \mathbf{c} \in U$.

Bizonyítás (folytatás).

Legyen $r = r(A)$. Sorcserével és a változók átnevezésével elérhető, hogy $\det(a_{i,j})_{r\times r} \neq 0$ teljesüljön. Ekkor az $U \leqslant K^n$ altér bázisát alkotják a homogén lineáris egyenletrendszer alábbi megoldásai:

$$\begin{aligned} v_{r+1} &= (c_{1,1}, \ldots, c_{1,r}, 1, 0, \ldots, 0, 0), \\ v_{r+2} &= (c_{2,1}, \ldots, c_{2,r}, 0, 1, \ldots, 0, 0), \\ &\vdots \\ v_n &= (c_{n,1}, \ldots, c_{n,r}, 0, 1, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

vektorok, azaz $\dim U = n - r$.

Bizonyítás (folytatás).

Legyen $r = r(A)$. Sorcserével és a változók átnevezésével elérhető, hogy $\det(a_{i,j})_{r\times r} \neq 0$ teljesüljön. Ekkor az $U \leqslant K^n$ altér bázisát alkotják a homogén lineáris egyenletrendszer alábbi megoldásai:

$$\begin{aligned} v_{r+1} &= (c_{1,1}, \dots, c_{1,r}, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ v_{r+2} &= (c_{2,1}, \dots, c_{2,r}, 0, 1, \dots, 0, 0), \\ &\vdots \\ v_n &= (c_{n,1}, \dots, c_{n,r}, 0, 1, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

vektorok, azaz $\dim U = n - r$.

Bizonyítás (folytatás).

Legyen $r = r(A)$. Sorcserével és a változók átnevezésével elérhető, hogy $\det(a_{i,j})_{r\times r} \neq 0$ teljesüljön. Ekkor az $U \leqslant K^n$ altér bázisát alkotják a homogén lineáris egyenletrendszer alábbi megoldásai:

$$\begin{aligned} v_{r+1} &= (c_{1,1}, \dots, c_{1,r}, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ v_{r+2} &= (c_{2,1}, \dots, c_{2,r}, 0, 1, \dots, 0, 0), \\ &\vdots \\ v_n &= (c_{n,1}, \dots, c_{n,r}, 0, 1, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

vektorok, azaz $\dim U = n - r$.
Q.E.D.

Defníció: fundamentális megoldásrendszer.

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai által alkotott altér bázisát a homogén lineáris egyenletrendszer **fundamentális megoldásrendszerének** vagy **alaprendszerének** nevezzük. Ha $u_1, \ldots, u_{n-r(A)}$ fundamentális megoldásrendszer, akkor az egyenletrendszer általános megoldása:

$$t_1 \cdot u_1 + \cdots + t_{n-r(A)} \cdot u_{n-r(A)},$$

ahol $t_1, \ldots, t_{n-r(A)}$ tetszőleges K-beli elemek.

Tétel.

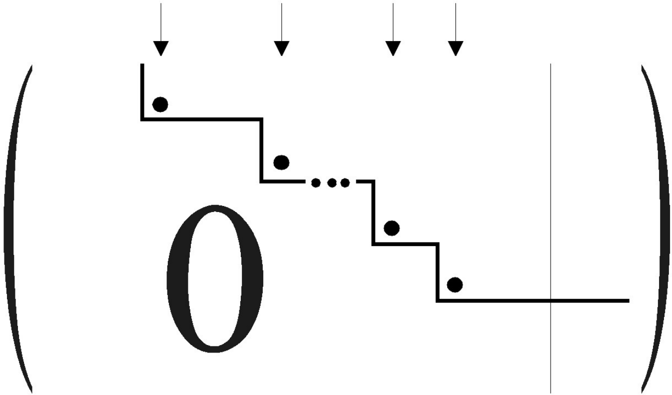
Legyen $A \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^{m \times 1}$ és $d = n - r(A)$. Tegyük fel, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek van megoldása, és legyen $u_0 \in K^n$ egy megoldás. Ekkor $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldásai $u_0 + v$ alakúak, ahol v az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása. Ha $v_1, \ldots, v_d$ az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer fundamentális megoldásrendszere, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$u_0 + t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_d \cdot v_d,$$

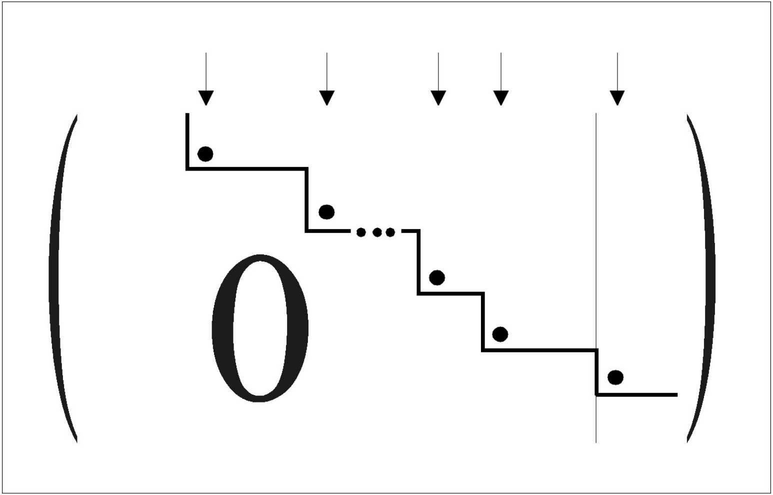
ahol $t_1, \ldots, t_d$ tetszőleges K-beli elemek.

Tétel.

Legyen $A \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^{m \times 1}$ és $d = n - r(A)$. Ekkor az $(A \mid \mathbf{b})$ mátrix sorokon végzett elemi átalakításokkal egy $(A' \mid \mathbf{b}')$ lépcsős alakra hozható, így az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ és $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ lineáris egyenletrendszerek ekvivalensek.



1. ábra: Az $(A \mid \mathbf{b})$ mátrix lépcsős alakja (van megoldás).



2. ábra: Az $(A \,|\, \mathbf{b})$ mátrix lépcsős alakja (nincs megoldás).