Diszkrét matematika III.

Kvadratikus alakok és Euklideszi terek

2009. május 9.

Feltesszük, hogy a K testben $1 + 1 \neq 0$.

Definíció: bilineáris leképezés.

Legyenek U és V vektorterek a K test felett. Egy $l\colon U \times V \to K$ leképezést **bilineáris leképezésnek** nevezünk,ha

Definíció: bilineáris leképezés.

Legyenek U és V vektorterek a K test felett. Egy $l\colon U \times V \to K$ leképezést **bilineáris leképezésnek** nevezünk,ha

(1) minden $u_1, u_2 \in U$ és $v \in V$ esetén $l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v)$,

Definíció: bilineáris leképezés.

Legyenek U és V vektorterek a K test felett. Egy $l\colon U \times V \to K$ leképezést **bilineáris leképezésnek** nevezünk,ha

(1) minden $u_1, u_2 \in U$ és $v \in V$ esetén $l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v)$,

(2) minden $u \in U$ és $v_1, v_2 \in V$ esetén $l(u, v_1 + v_2) = l(u, v_1) + l(u, v_2)$,

Definíció: bilineáris leképezés.

Legyenek U és V vektorterek a K test felett. Egy $l\colon U \times V \to K$ leképezést **bilineáris leképezésnek** nevezünk,ha

(1) minden $u_1, u_2 \in U$ és $v \in V$ esetén $l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v)$,

(2) minden $u \in U$ és $v_1, v_2 \in V$ esetén $l(u, v_1 + v_2) = l(u, v_1) + l(u, v_2)$,

(3) minden $\lambda \in K$, $u \in U$ és $v \in V$ esetén $l(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot l(u, v) = l(u, \lambda \cdot v)$.

Definíció: bilineáris leképezés.

Legyenek U és V vektorterek a K test felett. Egy $l\colon U \times V \to K$ leképezést **bilineáris leképezésnek** nevezünk,ha

(1) minden $u_1, u_2 \in U$ és $v \in V$ esetén $l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v)$,

(2) minden $u \in U$ és $v_1, v_2 \in V$ esetén $l(u, v_1 + v_2) = l(u, v_1) + l(u, v_2)$,

(3) minden $\lambda \in K$, $u \in U$ és $v \in V$ esetén $l(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot l(u, v) = l(u, \lambda \cdot v)$.

Definíció: bilineáris leképezés.

Legyenek U és V vektorterek a K test felett. Egy $l\colon U \times V \to K$ leképezést **bilineáris leképezésnek** nevezünk,ha

(1) minden $u_1, u_2 \in U$ és $v \in V$ esetén $l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v)$,

(2) minden $u \in U$ és $v_1, v_2 \in V$ esetén $l(u, v_1 + v_2) = l(u, v_1) + l(u, v_2)$,

(3) minden $\lambda \in K$, $u \in U$ és $v \in V$ esetén $l(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot l(u, v) = l(u, \lambda \cdot v)$.

Az l bilineáris leképezés **szimmetrikus**, ha $U = V$ és minden $u, v \in U$ esetén $l(u, v) = l(v, u)$.

Példa.

Tetszőleges n pozitív egész esetén az

$$I\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mapsto a_1 b_1 + \cdots a_n b_n$$

leképezés bilineáris, sőt szimmetrikus is.

Példa.

Tetszőleges n pozitív egész esetén az

$$l\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ ((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \mapsto a_1 b_1 + \cdots a_n b_n$$

leképezés bilineáris, sőt szimmetrikus is.

Példa.

Tetszőleges K test esetén az

$$l\colon K^2 \times K^2 \to K,\ \ ((a,b),(c,d)) \mapsto \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

leképezés bilineáris, de nem szimmetrikus.

Definíció: bilineáris leképezés mátrixa.

Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektortér a K test felett, továbbá $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_m$ bázis U-ban és $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_n$ bázis V-ben. Az $l \colon U \times V \to K$ bilineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban az $(l(e_i, f_j)) \in K^{m \times n}$ mátrix. Ha l szimmetrikus, akkor az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokat azonosnak választjuk, és így definiáljuk l mátrixát.

Definíció: bilineáris leképezés mátrixa.

Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektortér a K test felett, továbbá $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_m$ bázis U-ban és $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_n$ bázis V-ben. Az $l \colon U \times V \to K$ bilineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban az $(l(e_i, f_j)) \in K^{m \times n}$ mátrix. Ha l szimmetrikus, akkor az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokat azonosnak választjuk, és így definiáljuk l mátrixát.

Tétel.

Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektortér a K test felett, $\mathcal{E}$ bázis U-ban, $\mathcal{F}$ bázis V-ben, és $A \in K^{m \times n}$ az $l \colon U \times V \to K$ bilineáris leképezés mátrixa. Ekkor tetszőleges $u \in U$ és $v \in V$ vektorokra $l(u, v) = xAy^T$, ahol x az u vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban és y a v vektor koordinátasora az $\mathcal{F}$ bázisban. Tehát a bilineáris leképezés mátrixa (valamely bázisban) egyértelműen meghatározza a bilineáris leképezést.

Tétel.

Legyen V véges dimenziós vektortér a K test felett. Az $l \colon V \times V \to K$ bilineáris leképezés akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) bázisban szimmetrikus.

Tétel.

Legyen V véges dimenziós vektortér a K test felett. Az $l\colon V \times V \to K$ bilineáris leképezés akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) bázisban szimmetrikus.

Definíció: kvadratikus alak.

Legyen V vektortér a K test felett. A $q\colon V \to K$ leképezést **kvadratikus alaknak** nevezzük, ha létezik olyan $l\colon V \times V \to K$ szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyre $q(v) = l(v, v)$ teljesül minden $v \in V$ esetén.

Tétel.

Legyen V véges dimenziós vektortér a K test felett. Az $l\colon V \times V \to K$ bilineáris leképezés akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) bázisban szimmetrikus.

Definíció: kvadratikus alak.

Legyen V vektortér a K test felett. A $q\colon V \to K$ leképezést **kvadratikus alaknak** nevezzük, ha létezik olyan $l\colon V \times V \to K$ szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyre $q(v) = l(v, v)$ teljesül minden $v \in V$ esetén.

Tétel.

Bármely kvadratikus alak egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris leképezést.

Definíció: kvadratikus alak mátrixa.

A kvadratikus alak valamely bázisbeli mátrixán a kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris leképezés mátrixát értjük.

Definíció: kvadratikus alak mátrixa.

A kvadratikus alak valamely bázisbeli mátrixán a kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris leképezés mátrixát értjük.

Tétel.

Legyen V vektortér a K test felett, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok V-ben, és $q\colon V \to K$ kvadratikus alak. Ha q mátrixa A az $\mathcal{E}$ bázisban, és S az áttérés mátrixa az $\mathcal{F}$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra, akkor q mátrixa az $\mathcal{F}$ bázisban SAS^T.

Definíció: kvadratikus alak rangja.

A q kvadratikus alak rangján valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangját értjük, és $r(q)$-val jelöljük. Azt mondjuk, hogy a q kvadratikus alak az $\mathcal{E}$ bázisban **kanonikus alakú**, ha mátrixa diagonális.

Definíció: kvadratikus alak rangja.

A q kvadratikus alak rangján valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangját értjük, és $r(q)$-val jelöljük. Azt mondjuk, hogy a q kvadratikus alak az $\mathcal{E}$ bázisban **kanonikus alakú**, ha mátrixa diagonális.

Tétel (Kvadratikus alakok alaptétele).

Bármely véges dimenziós vektortéren értelmezett kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, amelyben a kvadratikus alak kanonikus alakú.

Következmény.

Bármely A szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan S nemelfajuló mátrix, amelyre SAS^T diagonális.

Következmény.

Bármely A szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan S nemelfajuló mátrix, amelyre SAS^T diagonális.

Definíció: valós kvadratikus alak.

Az $\mathbb{R}$ valós számtest feletti véges dimenziós vektortereken értelmezett kvadratikus alakokat valós kvadratikus alakoknak nevezzük. Az

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

alakú kvadratikus alakokat normálalakúnak nevezzük ($0 \leqslant k \leqslant r$).

Tétel.

Bármely valós kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, amelyben a kvadratikus alak normálalakú.

Kvadratikus alakok.

Tétel.

Bármely valós kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, amelyben a kvadratikus alak normálalakú.

Tétel (Tehetetlenségi tétel).

Minden valós kvadratikus alak normálalakja egyértelműen meghatározott, azaz ha két bázisban a kvadratikus alak normálalakú, akkor ugyanannyi benne a pozitív, illetve a negatív tagok száma.

Definíció.

A valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak

Definíció.

A valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak

(1) **pozitív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) > 0$,

Definíció.

A valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak

(1) **pozitív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) > 0$,

(2) **negatív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) < 0$,

Definíció.

A valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak

(1) **pozitív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) > 0$,

(2) **negatív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) < 0$,

(3) **pozitív szemidefinit**, ha minden $v \in V$ vektorra $q(v) \geqslant 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,

Definíció.

A valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak

(1) **pozitív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) > 0$,

(2) **negatív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) < 0$,

(3) **pozitív szemidefinit**, ha minden $v \in V$ vektorra $q(v) \geqslant 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,

(4) **negatív szemidefinit**, ha minden $v \in V$ vektorra $q(v) \leqslant 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,

Definíció.

A valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak

(1) **pozitív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) > 0$,

(2) **negatív definit**, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) < 0$,

(3) **pozitív szemidefinit**, ha minden $v \in V$ vektorra $q(v) \geqslant 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,

(4) **negatív szemidefinit**, ha minden $v \in V$ vektorra $q(v) \leqslant 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,

(5) minden más esetben **indefinit**, azaz ha léteznek olyan nemnulla $v, w \in V$ vektorok, hogy $q(v) > 0$ és $q(w) < 0$.

Tétel.

Legyen $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n-dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor

Tétel.

Legyen $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n-dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor

(1) pozitív definit, ha $k = r = n$,

Tétel.

Legyen $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n-dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor

(1) pozitív definit, ha $k = r = n$,

(2) negatív definit, ha $k = 0$ és $r = n$,

Tétel.

Legyen $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n-dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor

(1) pozitív definit, ha $k = r = n$,

(2) negatív definit, ha $k = 0$ és $r = n$,

(3) pozitív szemidefinit, ha $k = r < n$,

Tétel.

Legyen $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n-dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor

(1) pozitív definit, ha $k = r = n$,

(2) negatív definit, ha $k = 0$ és $r = n$,

(3) pozitív szemidefinit, ha $k = r < n$,

(4) negatív szemidefinit, ha $k = 0$ és $r < n$,

Tétel.

Legyen $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n-dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor

(1) pozitív definit, ha $k = r = n$,

(2) negatív definit, ha $k = 0$ és $r = n$,

(3) pozitív szemidefinit, ha $k = r < n$,

(4) negatív szemidefinit, ha $k = 0$ és $r < n$,

(5) indefinit, ha $0 < k < r$.

Tétel.

Legyen $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n-dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor

(1) pozitív definit, ha $k = r = n$,

(2) negatív definit, ha $k = 0$ és $r = n$,

(3) pozitív szemidefinit, ha $k = r < n$,

(4) negatív szemidefinit, ha $k = 0$ és $r < n$,

(5) indefinit, ha $0 < k < r$.

Következmény.

Minden olyan A szimmetrikus mátrixhoz, amelyhez tartozó xAx^T kvadratikus alak pozitív definit, létezik olyan P nemelfajuló valós mátrix, amelyre $A = PP^T$.

Euklideszi terek.

Definíció: Euklideszi tér.

A valós számtest feletti véges dimenziós V vektorteret **Euklideszi térnek** nevezzük a $\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ belső szorzattal, ha $\langle -,- \rangle$ olyan szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyhez tartozó kvadratikus alak pozitív definit. Az $u \in V$ vektor **hosszán** (normáján) az $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ nemnegatív valós számot értjük. Az u vektor normált, ha $||u|| = 1$. Az u és v vektorok távolsága alatt az $||u - v||$ számot értjük.

Euklideszi terek.

Definíció: Euklideszi tér.

A valós számtest feletti véges dimenziós V vektorteret **Euklideszi térnek** nevezzük a $\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ belső szorzattal, ha $\langle -,- \rangle$ olyan szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyhez tartozó kvadratikus alak pozitív definit. Az $u \in V$ vektor **hosszán** (normáján) az $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ nemnegatív valós számot értjük. Az u vektor normált, ha $||u|| = 1$. Az u és v vektorok távolsága alatt az $||u - v||$ számot értjük.

Példa.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér Euklideszi tér az

$$\langle x, y \rangle = xy^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

standard belső szorzattal.

Euklideszi terek.

Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség).

Euklideszi tér tetszőleges u és v vektora esetén

$$|\langle u, v\rangle \leqslant ||u|| \cdot ||v||.$$

Euklideszi terek.

Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-féle egyenlőtlenség).

Euklideszi tér tetszőleges u és v vektora esetén

$$|\langle u, v\rangle \leqslant ||u|| \cdot ||v||.$$

Tétel (Háromszög egyenlőtlenség).

Euklideszi tér tetszőleges u és v vektora esetén

$$||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||.$$

Euklideszi terek.

Definíció.

Tetszőleges u és v vektorokra létezik egy egyértelműen meghatározott $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ szög, hogy

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Ezt az α szöget az u és v vektorok szögének nevezünk. Azt mondjuk, hogy az u és v vektorok **merőlegesesek** (ortogonálisak), ha $\langle u, v\rangle = 0$, amit $u \perp v$-vel jelölünk.

Euklideszi terek.

Definíció.

Tetszőleges u és v vektorokra létezik egy egyértelműen meghatározott $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ szög, hogy

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Ezt az α szöget az u és v vektorok szögének nevezünk. Azt mondjuk, hogy az u és v vektorok **merőlegesesek** (ortogonálisak), ha $\langle u, v\rangle = 0$, amit $u \perp v$-vel jelölünk.

Definíció: ortogonális vektorrendszer.

Az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer **ortogonális**, ha bármely $1 \leqslant i < j \leqslant k$ esetén $u_i \perp u_j$. Ha az $u_1, \dots, u_k$ vektorok normáltak is, akkor **ortonormált vektorrendszerről** beszélünk. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot **ortogonális mátrixnak** nevezzük, ha sorvektorrendszere ortonormált az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben.

Euklideszi terek.

Következmény.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha $AA^T = E$, azaz $A^{-1} = A^T$.

Euklideszi terek.

Következmény.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha $AA^T = E$, azaz $A^{-1} = A^T$.

Tétel (Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció).

Euklideszi tér tetszőleges $u_1, \dots, u_k$ lineárisan független vektorrendszere esetén van olyan $v_1, \dots, v_k$ ortonormált vektorrendszer, amelyre $[u_1, \dots, u_k] = [v_1, \dots, v_k]$.

Euklideszi terek.

Következmény.

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha $AA^T = E$, azaz $A^{-1} = A^T$.

Tétel (Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció).

Euklideszi tér tetszőleges $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független vektorrenszere esetén van olyan $v_1, \ldots, v_k$ ortonormált vektorrendszer, amelyre $[u_1, \ldots, u_k] = [v_1, \ldots, v_k]$.

Következmény.

Euklideszi tér bármely ortonormált vektorrendszere kiegészíthető ortonormált bázissá. Euklideszi térben van ortonormált bázis.

Euklideszi terek.

Definíció.

Az U és V Euklideszi terek izomorfak, ha van olyan $\varphi\colon U \to V$ vektortér izomorfizmus, amely megtartja a belső szorzatot, azaz $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ minden $u, v \in U$ esetén.

Euklideszi terek.

Definíció.

Az U és V Euklideszi terek izomorfak, ha van olyan $\varphi\colon U \to V$ vektortér izomorfizmus, amely megtartja a belső szorzatot, azaz $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ minden $u, v \in U$ esetén.

Tétel.

Bármely n-dimenziós euklideszi tér izomorf az R^n Euklideszi térrel.

Euklideszi terek.

Definíció.

Legyen V Euklideszi tér. Azt mondjuk, hogy a $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció szimmetrikus, ha minden $u, v \in V$ esetén $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$.

Euklideszi terek.

Definíció.

Legyen V Euklideszi tér. Azt mondjuk, hogy a $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció szimmetrikus, ha minden $u, v \in V$ esetén $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$.

Tétel.

Euklideszi tér lineáris transzformációja akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) ortonormált bázisban szimmetrikus.