Diszkrét matematika III.

Lineáris leképezések

2009. május 8.

Definíció: lineáris leképezés.

Legyenek V és W a K test feletti vektorterek. A $\varphi\colon V \to W$ leképezést **lineáris leképezésnek** nevezzük, ha bármely $v, v' \in V$ vektorokra és bármely $c \in K$ skalárra teljesülnek a következők:

$$\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v'),$$
$$\varphi(c \cdot v) = c \cdot \varphi(v).$$

Ha $W = V$, akkor φ-t **lineáris transzformációnak** nevezzük.

Definíció: magtér, képtér.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor φ magtere $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$, illetve képtere $\mathrm{Im}\,(\varphi)$:

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathbf{0}\} \subseteq V, \qquad \mathrm{Im}\,(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W.$$

Definíció: magtér, képtér.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor φ magtere $\operatorname{Ker}(\varphi)$, illetve képtere $\operatorname{Im}(\varphi)$:

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathbf{0}\} \subseteq V, \qquad \operatorname{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W.$$

Tétel.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor

Definíció: magtér, képtér.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor φ magtere $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$, illetve képtere $\mathrm{Im}\,(\varphi)$:

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathbf{0}\} \subseteq V, \qquad \mathrm{Im}\,(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W.$$

Tétel.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor

Definíció: magtér, képtér.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor φ magtere $\operatorname{Ker}(\varphi)$, illetve képtere $\operatorname{Im}(\varphi)$:

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathbf{0}\} \subseteq V, \qquad \operatorname{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W.$$

Tétel.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor

$$\dim \operatorname{Ker}(\varphi) + \dim \operatorname{Im}(\varphi) = \dim V.$$

Következmény.

Legyen V vektortér a K test felett, $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció.

Következmény.

Legyen V vektortér a K test felett, $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció.

Következmény.

Legyen V vektortér a K test felett, $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció. Ekkor φ bijektív $\iff$ φ injektív $\iff$ φ szürjektív.

Példa.

Következmény.

Legyen V vektortér a K test felett, $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció. Ekkor φ bijektív $\Longleftrightarrow$ φ injektív $\Longleftrightarrow$ φ szürjektív.

Példa.

- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(a, b) \mapsto (a, b, a + b)$,

Következmény.

Legyen V vektortér a K test felett, $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció. Ekkor φ bijektív $\iff$ φ injektív $\iff$ φ szürjektív.

Példa.

- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(a, b) \mapsto (a, b, a + b)$,
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b) \mapsto (-b, a)$,

Következmény.

Legyen V vektortér a K test felett, $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció. Ekkor φ bijektív $\iff$ φ injektív $\iff$ φ szürjektív.

Példa.

- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(a, b) \mapsto (a, b, a + b)$,
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b) \mapsto (-b, a)$,
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b) \mapsto (a, 1)$,

Következmény.

Legyen V vektortér a K test felett, $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció. Ekkor φ bijektív $\iff$ φ injektív $\iff$ φ szürjektív.

Példa.

- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(a, b) \mapsto (a, b, a + b)$,
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b) \mapsto (-b, a)$,
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b) \mapsto (a, 1)$,
- $V \to V$, $f \mapsto f'$, ahol V az differenciálható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezések vektortere,

Következmény.

Legyen V vektortér a K test felett, $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció. Ekkor φ bijektív $\iff$ φ injektív $\iff$ φ szürjektív.

Példa.

- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(a, b) \mapsto (a, b, a + b)$,
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b) \mapsto (-b, a)$,
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b) \mapsto (a, 1)$,
- $V \to V$, $f \mapsto f'$, ahol V az differenciálható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezések vektortere,
- $V \to V$, $f \mapsto f(0)$, ahol V az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezések vektortere.

Definíció: műveletek lineáris leképezésekkel.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi, \psi\colon V \to W$ lineáris leképezések. Ekkor a $\varphi + \psi$ és $c \cdot \varphi$ $(c \in K)$ leképezések a következők:

$$\varphi + \psi\colon V \to W, \ v \mapsto \varphi(v) + \psi(v),$$
$$c \cdot \varphi\colon V \to W, \ v \mapsto c \cdot \varphi(v).$$

Definíció: műveletek lineáris leképezésekkel.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi, \psi \colon V \to W$ lineáris leképezések. Ekkor a $\varphi + \psi$ és $c \cdot \varphi$ ($c \in K$) leképezések a következők:

$$\varphi + \psi \colon V \to W,\ v \mapsto \varphi(v) + \psi(v),$$
$$c \cdot \varphi \colon V \to W,\ v \mapsto c \cdot \varphi(v).$$

Tétel.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi, \psi \colon V \to W$ lineáris leképezések. Ekkor $\varphi + \psi$ tetszőleges $c \in K$-ra $c \cdot \varphi$ is lineáris leképezés. Az összes $V \to W$ lineáris leképezések $\mathrm{Hom}(V, W)$ halmaza az előbbi műveletekkel vektorteret alkot.

Tétel.

Legyenek V, W és U vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ és $\psi\colon W \to U$ lineáris leképezések. Ekkor a $\psi\varphi\colon V \to U,\ v \mapsto \psi(\varphi(v))$ leképezés lineáris leképezés.

Tétel.

Legyenek V, W és U vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ és $\psi\colon W \to U$ lineáris leképezések. Ekkor a $\psi\varphi\colon V \to U,\ v \mapsto \psi(\varphi(v))$ leképezés lineáris leképezés.

Tétel.

Legyenek V, W és U, U' vektorterek a K test felett, $\varphi, \psi\colon V \to W$, $\chi\colon U \to V$ és $\chi'\colon W \to U'$ lineáris leképezések, valamint legyen $c \in K$. Ekkor teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)\chi &= \varphi\chi+\psi\chi,\\ \chi'(\varphi+\psi) &= \chi'\varphi+\chi'\psi,\\ c\cdot(\varphi\chi) &= \varphi(c\cdot\chi) = (c\cdot\varphi)\chi.\end{aligned}$$

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben és legyenek $w_1, \ldots, w_n$ tetszőleges W-beli vektorok.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E}: e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F}: f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben és legyenek $w_1, \ldots, w_n$ tetszőleges W-beli vektorok.

Tétel.

Pontosan egy olyan $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés van, amelyre $\varphi(e_i) = w_i$ teljesül minden i-re $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben és legyenek $w_1, \ldots, w_n$ tetszőleges W-beli vektorok.

Tétel.

Pontosan egy olyan $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés van, amelyre $\varphi(e_i) = w_i$ teljesül minden i-re $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben és legyenek $w_1, \ldots, w_n$ tetszőleges W-beli vektorok.

Tétel.

Pontosan egy olyan $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés van, amelyre $\varphi(e_i) = w_i$ teljesül minden i-re $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Legyen $\varphi(e_i) = a_{i,1} \cdot f_1 + \cdots + a_{i,k} \cdot f_k$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben és legyenek $w_1, \ldots, w_n$ tetszőleges W-beli vektorok.

Tétel.

Pontosan egy olyan $\varphi \colon V \to W$ lineáris leképezés van, amelyre $\varphi(e_i) = w_i$ teljesül minden i-re $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Legyen $\varphi(e_i) = a_{i,\,1} \cdot f_1 + \cdots + a_{i,\,k} \cdot f_k$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Definíció: lineáris leképezés mátrixa.

Az $A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = (a_{i,\,j}) \in K^{n \times k}$ mátrixot a φ lineáris leképezés mátrixának nevezzük az $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{F}$ bázisokban.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben.
Legyen a $\varphi \colon V \to W$ lineáris leképezés mátrixa a fenti bázisokban Az $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = (a_{i,j}) \in K^{n \times k}$. Legyen v tetszőleges vektor V-ben. Ekkor vannak olyan (egyértelműen meghatározott) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ skalárok, amelyekre $v = \alpha_1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n$ teljesül, így

$$\begin{aligned}
\varphi(v) &= \varphi(\alpha_1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n) = \alpha_1 \cdot \varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n \cdot \varphi(e_n) \\
&= \alpha_1 \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} a_{1,j} \cdot f_j \right) + \cdots + \alpha_n \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} a_{n,j} \cdot f_j \right) \\
&= (\alpha_1 a_{1,1} + \cdots + \alpha_n a_{n,1}) \cdot f_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{1,k} + \cdots + \alpha_n a_{n,k}) \cdot f_k \\
&= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) A (f_1, \ldots, f_k)^T.
\end{aligned}$$

Tétel.

Legyen V a K test feletti n-dimenziós vektortér. Ekkor V izomorf K^n-nel.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben.

Tétel.

Legyen V a K test feletti n-dimenziós vektortér. Ekkor V izomorf K^n-nel.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben.

Tétel.

Legyen V a K test feletti n-dimenziós vektortér. Ekkor V izomorf K^n-nel.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben.

Tétel.

Ha a $\varphi\colon V \to W$, illetve $\psi\colon V \to W$ lineáris leképezések mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = (a_{i,j})_{n\times k}$, illetve $A_\psi^{\mathcal{E}\mathcal{F}} = (b_{i,j})_{n\times k}$, akkor

Tétel.

Legyen V a K test feletti n-dimenziós vektortér. Ekkor V izomorf K^n-nel.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E}: e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F}: f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben.

Tétel.

Ha a $\varphi\colon V \to W$, illetve $\psi\colon V \to W$ lineáris leképezések mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = (a_{i,j})_{n\times k}$, illetve $A_\psi^{\mathcal{E}\mathcal{F}} = (b_{i,j})_{n\times k}$, akkor

(a) $\varphi + \psi$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban $(a_{i,j} + b_{i,j})_{n\times k}$,

Tétel.

Legyen V a K test feletti n-dimenziós vektortér. Ekkor V izomorf K^n-nel.

Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, illetve $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$ vektorok bázist alkotnak V-ben, illetve W-ben.

Tétel.

Ha a $\varphi\colon V \to W$, illetve $\psi\colon V \to W$ lineáris leképezések mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban $A_\varphi^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = (a_{i,j})_{n\times k}$, illetve $A_\psi^{\mathcal{E}\mathcal{F}} = (b_{i,j})_{n\times k}$, akkor

(a) $\varphi + \psi$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban $(a_{i,j} + b_{i,j})_{n\times k}$,

(b) tetszőleges $c \in K$ skalárra a $c \cdot \varphi$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban $(ca_{i,j})_{n\times k}$.

Legyenek V, W és U végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$, illetve $\mathcal{G} : g_1, \ldots, g_m \in U$ vektorok rendre bázist alkotnak V-ben, W-ben, illetve U-ban.

Legyenek V, W és U végesdimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n \in V$, $\mathcal{F} : f_1, \ldots, f_k \in W$, illetve $\mathcal{G} : g_1, \ldots, g_m \in U$ vektorok rendre bázist alkotnak V-ben, W-ben, illetve U-ban.

Tétel.

Ha a $\varphi \colon V \to W$, illetve $\psi \colon W \to U$ lineáris leképezések mátrixa az $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, illetve $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ bázisokban $A_{\varphi}^{\mathcal{E},\mathcal{F}} = (a_{i,j})_{n \times k}$, illetve $A_{\psi}^{\mathcal{F},\mathcal{G}} = (b_{i,j})_{k \times m}$, akkor

$$A_{\varphi\psi}^{\mathcal{E},\mathcal{G}} = \left(\sum_{j=1}^{l} a_{i,j} b_{j,l} \right)_{n \times m}.$$

Következmény.

Ha V n-dimenziós és W k-dmenziós vektortér a K test felett, akkor a lineáris leképezések $\mathrm{Hom}(V, W)$ vektortere izomorf a K test feletti $n \times k$-s mátrixok $K^{n \times k}$ vektorterével. Így nk dimenziós.

Következmény.

Ha V n-dimenziós és W k-dmenziós vektortér a K test felett, akkor a lineáris leképezések $\mathrm{Hom}(V, W)$ vektortere izomorf a K test feletti $n \times k$-s mátrixok $K^{n \times k}$ vektorterével. Így nk dimenziós.

Definíció: áttérési mátrix.

Legyen $\mathcal{E} : e_1, \ldots, e_n$ és $\mathcal{E}' : e_1', \ldots, e_n'$ a K test feletti V vektortér két bázisa. Az $\mathrm{id}_U \in \mathrm{Hom}(U, U)$ identikus lineáris leképezés $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ bázisokban megadott mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra való áttérés mátrixának hívjuk.

Tétel.

Legyen a K test feletti V vektortér két bázisa $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$, továbbá legyen P az áttérés mátrixa az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra. Ekkor P nemelfajuló mátrix, továbbá az $\mathcal{E}'$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra való áttérés mátrixa P^{-1}.

Tétel.

Legyen a K test feletti V vektortér két bázisa $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$, továbbá legyen P az áttérés mátrixa az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{E}'$ bázisra. Ekkor P nemelfajuló mátrix, továbbá az $\mathcal{E}'$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra való áttérés mátrixa P^{-1}.

Tétel.

Legyenek V és W ugyanazon K test feletti vektorterek, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ a V, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ pedig a W vektortér bázisa. Jelölje P, illetve S az áttérés mátrixát $\mathcal{E}'$-ről $\mathcal{E}'$-re, illetve $\mathcal{F}$-ről $\mathcal{F}'$-re. Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lineáris leképezés, és legyen φ mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban A. Ekkor φ mátrixa az $\mathcal{E}'$ és $\mathcal{F}'$ bázisokban $P^{-1}AS$.

Definíció: hasonló mátrixok.

Legyen K test és n pozitív egész. Az $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixok **hasonlók**, ha létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{n\times n}$ mátrix, hogy $A = P^{-1}BP$.

Definíció: hasonló mátrixok.

Legyen K test és n pozitív egész. Az $A, B \in T^{n \times n}$ mátrixok **hasonlók**, ha létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{n \times n}$ mátrix, hogy $A = P^{-1}BP$.

Következmény.

Ugyanazon lineáris transzformáció két különböző bázisban felírt mátrixa hasonló.

Definíció: hasonló mátrixok.

Legyen K test és n pozitív egész. Az $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixok **hasonlók**, ha létezik olyan nemelfajuló $P \in T^{n\times n}$ mátrix, hogy $A = P^{-1}BP$.

Következmény.

Ugyanazon lineáris transzformáció két különböző bázisban felírt mátrixa hasonló.

Definíció: lneáris leképezés rangja.

A φ **lineáris leképezés rangján** a képterének dimenzióját értjük, azaz $r(\varphi) = \dim \operatorname{Im}(\varphi)$.

Tétel.

Véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés rangja megegyezik valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangjával.

Tétel.

Véges dimenziós vektorterek közötti lineáris leképezés rangja megegyezik valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangjával.

Következmény.

Legyen φ lineáris transzformáció valamely végesdimenziós vektortérben. Ekkor φ akkor és csak akkor bijektív, ha valamely (bármely) bázisbeli mátrixa nemelfajuló.

Tétel.

Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektorterek ugyanazon K test fölött, és $\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Ekkor φ mátrixa az U és V egy-egy alkalmas bázisában

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}.$$

ahol r a φ lineáris leképezés rangja, E_r az $r \times r$ méretű egységmátrix, és a zérók a megfelelő méretű zérómátrixok.

Tétel.

Legyen K tetszőleges test. Ekkor minden $A \in K^{m \times n}$ mátrixhoz léteznek olyan nemelfajuló $P \in K^{m \times m}$ és $Q \in K^{n \times n}$ mátrixok, hogy

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}.$$

ahol r az A mátrix rangja, és a jobb oldalon álló mátrix ugyanaz, mint az előző tételben.

Definíció: mátrix rangjai.

Legyen K tetszőleges test, $A \in K^{m \times n}$.

Definíció: mátrix rangjai.

Legyen K tetszőleges test, $A \in K^{m \times n}$.

- Az A mátrix $r_s(A)$ **sorrangja** a mátrix sorvektorai ($\in K^n$) által alkotott vektorrendszer rangja.

Definíció: mátrix rangjai.

Legyen K tetszőleges test, $A \in K^{m \times n}$.

- Az A mátrix $r_s(A)$ **sorrangja** a mátrix sorvektorai ($\in K^n$) által alkotott vektorrendszer rangja.
- Az A mátrix $r_o(A)$ **oszloprangja** a mátrix oszlopvektorai ($\in K^m$) által alkotott vektorrendszer rangja.

Definíció: mátrix rangjai.

Legyen K tetszőleges test, $A \in K^{m \times n}$.

- Az A mátrix $r_s(A)$ **sorrangja** a mátrix sorvektorai ($\in K^n$) által alkotott vektorrendszer rangja.
- Az A mátrix $r_o(A)$ **oszloprangja** a mátrix oszlopvektorai ($\in K^m$) által alkotott vektorrendszer rangja.
- Az A mátrix $r_d(A)$ **determinánsrangja** a mátrix nemeltűnő aldeterminánsai rendjének a maximuma.

Tétel.

Tetszőleges $A \in K^{m \times n}$ mátrixra $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.

Tétel.

Tetszőleges $A \in K^{m \times n}$ mátrixra $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.

Bizonyítás.

Tétel.

Tetszőleges $A \in K^{m\times n}$ mátrixra $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.

Bizonyítás.

(a) $r_s(A) = r_d(A)$:

Tétel.

Tetszőleges $A \in K^{m\times n}$ mátrixra $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.

Bizonyítás.

(a) $r_s(A) = r_d(A)$:

- Az A mátrix a sorain végzett elemei átalakításokkal lépcsős alakra hozható: L.

Tétel.

Tetszőleges $A \in K^{m \times n}$ mátrixra $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.

Bizonyítás.

(a) $r_s(A) = r_d(A)$:

- Az A mátrix a sorain végzett elemei átalakításokkal lépcsős alakra hozható: L.
- Az A mátrix a sorain végzett elemei átalakítások során determinánsrangja nem csökken, sőt $r_d(A) = r_d(L)$.

Tétel.

Tetszőleges $A \in K^{m \times n}$ mátrixra $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.

Bizonyítás.

(a) $r_s(A) = r_d(A)$:

- Az A mátrix a sorain végzett elemei átalakításokkal lépcsős alakra hozható: L.
- Az A mátrix a sorain végzett elemei átalakítások során determinánsrangja nem csökken, sőt $r_d(A) = r_d(L)$.
- $r_s(L) = r_d(L)$.

Tétel.

Tetszőleges $A \in K^{m \times n}$ mátrixra $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.

Bizonyítás.

(a) $r_s(A) = r_d(A)$:
- Az A mátrix a sorain végzett elemei átalakításokkal lépcsős alakra hozható: L.
- Az A mátrix a sorain végzett elemei átalakítások során determinánsrangja nem csökken, sőt $r_d(A) = r_d(L)$.
- $r_s(L) = r_d(L)$.

(b) $r_o(A) = r_d(A)$.

Tétel.

Tetszőleges $A \in K^{m \times n}$ mátrixra $r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.

Bizonyítás.

(a) $r_s(A) = r_d(A)$:
- Az A mátrix a sorain végzett elemei átalakításokkal lépcsős alakra hozható: L.
- Az A mátrix a sorain végzett elemei átalakítások során determinánsrangja nem csökken, sőt $r_d(A) = r_d(L)$.
- $r_s(L) = r_d(L)$.

(b) $r_o(A) = r_d(A)$.

Definíció: mátrix rangja.

Az $A \in K^{m \times n}$ mátrixra rangja $r(A) = r_s(A) = r_o(A) = r_d(A)$.