Diszkrét matematika III.

Vektorterek

2009. április 24.

Definíció: vektortér.

Legyen V egy nemüres halmaz, K (szám)test. Tegyük fel, hogy V-n értelmezve van egy 2-változós $+$ művelet (összeadás), valamint minden $\lambda \in K$-ra van egy 1-változós $\lambda\cdot$ művelet ($+\colon V \times V \to V,\ (u,v) \mapsto u+v$, $\lambda\cdot\colon V \to V,\ u \mapsto \lambda \cdot u$). Azt mondjuk, hogy V **vektortér a (K test felett)**, ha teljesülnek a következők:

Definíció: vektortér.

Legyen V egy nemüres halmaz, K (szám)test. Tegyük fel, hogy V-n értelmezve van egy 2-változós $+$ művelet (összeadás), valamint minden $\lambda \in K$-ra van egy 1-változós $\lambda\cdot$ művelet ($+\colon V \times V \to V,\ (u,v) \mapsto u+v$, $\lambda\cdot\colon V \to V,\ u \mapsto \lambda \cdot u$). Azt mondjuk, hogy V **vektortér a (K test felett)**, ha teljesülnek a következők:

(1) a $+$ művelet kommutatív, azaz tetszőleges $u, v \in V$-re $u+v = v+u$,

Definíció: vektortér.

Legyen V egy nemüres halmaz, K (szám)test. Tegyük fel, hogy V-n értelmezve van egy 2-változós $+$ művelet (összeadás), valamint minden $\lambda \in K$-ra van egy 1-változós $\lambda\cdot$ művelet ($+\colon V \times V \to V,\ (u,v) \mapsto u+v$, $\lambda\cdot\colon V \to V,\ u \mapsto \lambda \cdot u$). Azt mondjuk, hogy V **vektortér a (K test felett)**, ha teljesülnek a következők:

(1) a $+$ művelet kommutatív, azaz tetszőleges $u, v \in V$-re $u+v = v+u$,

(2) a $+$ művelet asszociatív, azaz tetszőleges $u, v, w \in V$-re $(u+v)+w = u+(v+w)$,

Definíció: vektortér.

Legyen V egy nemüres halmaz, K (szám)test. Tegyük fel, hogy V-n értelmezve van egy 2-változós $+$ művelet (összeadás), valamint minden $\lambda \in K$-ra van egy 1-változós $\lambda\cdot$ művelet ($+\colon V \times V \to V,\ (u,v) \mapsto u+v$, $\lambda\cdot\colon V \to V,\ u \mapsto \lambda \cdot u$). Azt mondjuk, hogy V **vektortér a (K test felett)**, ha teljesülnek a következők:

(1) a $+$ művelet kommutatív, azaz tetszőleges $u, v \in V$-re $u+v = v+u$,

(2) a $+$ művelet asszociatív, azaz tetszőleges $u, v, w \in V$-re $(u+v)+w = u+(v+w)$,

(3) a $+$ műveletre vonatkozóan van zéruselem, azaz van olyan $\mathbf{0} \in V$, amelyre $\mathbf{0}+u = u+\mathbf{0} = u$ teljesül ($u \in V$),

Definíció: vektortér.

Legyen V egy nemüres halmaz, K (szám)test. Tegyük fel, hogy V-n értelmezve van egy 2-változós $+$ művelet (összeadás), valamint minden $\lambda \in K$-ra van egy 1-változós $\lambda\cdot$ művelet ($+\colon V \times V \to V,\ (u,v) \mapsto u+v$, $\lambda\cdot\colon V \to V,\ u \mapsto \lambda \cdot u$). Azt mondjuk, hogy V **vektortér a (K test felett)**, ha teljesülnek a következők:

(1) a $+$ művelet kommutatív, azaz tetszőleges $u, v \in V$-re $u+v = v+u$,

(2) a $+$ művelet asszociatív, azaz tetszőleges $u, v, w \in V$-re $(u+v)+w = u+(v+w)$,

(3) a $+$ műveletre vonatkozóan van zéruselem, azaz van olyan $\mathbf{0} \in V$, amelyre $\mathbf{0}+u = u+\mathbf{0} = u$ teljesül ($u \in V$),

(4) tetszőleges $u \in V$ elemnek van inverze $+$-ra vonatkozóan, azaz van olyan $v \in V$ elem, amelyre $u+v = v+u = \mathbf{0}$ teljesül;

Definíció: vektortér (folytatás).

Definíció: vektortér (folytatás).

(5) tetszőleges $u, v \in V$-re és $\alpha \in K$-ra teljesül, hogy $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

Definíció: vektortér (folytatás).

(5) tetszőleges $u, v \in V$-re és $\alpha \in K$-ra teljesül, hogy $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

(6) tetszőleges $u \in V$-re és $\alpha, \beta \in K$-ra teljesül, hogy $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,

Definíció: vektortér (folytatás).

(5) tetszőleges $u, v \in V$-re és $\alpha \in K$-ra teljesül, hogy $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

(6) tetszőleges $u \in V$-re és $\alpha, \beta \in K$-ra teljesül, hogy $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,

(7) tetszőleges $u \in V$-re és $\alpha, \beta \in K$-ra teljesül, hogy $\beta \cdot (\alpha \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,

Definíció: vektortér (folytatás).

(5) tetszőleges $u, v \in V$-re és $\alpha \in K$-ra teljesül, hogy $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

(6) tetszőleges $u \in V$-re és $\alpha, \beta \in K$-ra teljesül, hogy $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,

(7) tetszőleges $u \in V$-re és $\alpha, \beta \in K$-ra teljesül, hogy $\beta \cdot (\alpha \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,

(8) tetszőleges $u \in V$-re teljesül, hogy $1 \cdot u = u$, ahol $1 \in K$ a K test egységelem.

Definíció: vektortér (folytatás).

(5) tetszőleges $u, v \in V$-re és $\alpha \in K$-ra teljesül, hogy $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

(6) tetszőleges $u \in V$-re és $\alpha, \beta \in K$-ra teljesül, hogy $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,

(7) tetszőleges $u \in V$-re és $\alpha, \beta \in K$-ra teljesül, hogy $\beta \cdot (\alpha \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,

(8) tetszőleges $u \in V$-re teljesül, hogy $1 \cdot u = u$, ahol $1 \in K$ a K test egységelem.

Definíció: vektortér (folytatás).

(5) tetszőleges $u, v \in V$-re és $\alpha \in K$-ra teljesül, hogy $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,

(6) tetszőleges $u \in V$-re és $\alpha, \beta \in K$-ra teljesül, hogy $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$,

(7) tetszőleges $u \in V$-re és $\alpha, \beta \in K$-ra teljesül, hogy $\beta \cdot (\alpha \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,

(8) tetszőleges $u \in V$-re teljesül, hogy $1 \cdot u = u$, ahol $1 \in K$ a K test egységelem.

A V halmaz elemeit **vektoroknak**, a K test elemeit **skalároknak** nevezzük.

Definíció: lineáris függetlenség.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $v_1, \ldots, v_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Az

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

vektort **a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának** nevezzük. Az $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ lineáris kombináció **triviális**, ha $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definíció: lineáris függetlenség.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $v_1, \ldots, v_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Az

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

vektort **a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának** nevezzük. Az $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ lineáris kombináció **triviális**, ha $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definíció: lineáris függetlenség.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Azt mondjuk, hogy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha valahányszor $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = \mathbf{0}$ mindannyiszor $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ teljesül. Ha egy vektorrendszer nem lineárisan független, akkor azt mondjuk, hogy **lineárisan függő**.

Definíció: altér.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy U altér V-ben, ha bármely $u, v \in U$ vektorok és $\alpha \in K$ skalár esetén $u + v \in U$, $\alpha \cdot u \in U$ teljesül és $(U; +|_U, \alpha \cdot |_U)$ vektortér K felett.

Definíció: altér.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy U altér V-ben, ha bármely $u, v \in U$ vektorok és $\alpha \in K$ skalár esetén $u + v \in U$, $\alpha \cdot u \in U$ teljesül és $(U; +|_U, \alpha \cdot |_U)$ vektortér K felett.

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Az U részhalmaz pontosan akkor altér V-ben, ha

Definíció: altér.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy U altér V-ben, ha bármely $u, v \in U$ vektorok és $\alpha \in K$ skalár esetén $u + v \in U$, $\alpha \cdot u \in U$ teljesül és $(U; +|_U, \alpha \cdot |_U)$ vektortér K felett.

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Az U részhalmaz pontosan akkor altér V-ben, ha

- bármely $u, v \in U$ vektorok esetén $u + v \in U$,

Definíció: altér.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy U altér V-ben, ha bármely $u, v \in U$ vektorok és $\alpha \in K$ skalár esetén $u + v \in U$, $\alpha \cdot u \in U$ teljesül és $(U; +|_U, \alpha \cdot |_U)$ vektortér K felett.

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Az U részhalmaz pontosan akkor altér V-ben, ha

- bármely $u, v \in U$ vektorok esetén $u + v \in U$,
- bármely $u \in U$ vektor és $\alpha \in K$ skalár esetén $\alpha \cdot u \in U$, valamint

Definíció: altér.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy U altér V-ben, ha bármely $u, v \in U$ vektorok és $\alpha \in K$ skalár esetén $u + v \in U$, $\alpha \cdot u \in U$ teljesül és $(U; +|_U, \alpha \cdot |_U)$ vektortér K felett.

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Az U részhalmaz pontosan akkor altér V-ben, ha

- bármely $u, v \in U$ vektorok esetén $u + v \in U$,
- bármely $u \in U$ vektor és $\alpha \in K$ skalár esetén $\alpha \cdot u \in U$, valamint
- $\mathbf{0} \in U$.

Definíció: altér.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy U altér V-ben, ha bármely $u, v \in U$ vektorok és $\alpha \in K$ skalár esetén $u + v \in U$, $\alpha \cdot u \in U$ teljesül és $(U; +|_U, \alpha \cdot |_U)$ vektortér K felett.

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Az U részhalmaz pontosan akkor altér V-ben, ha

- bármely $u, v \in U$ vektorok esetén $u + v \in U$,
- bármely $u \in U$ vektor és $\alpha \in K$ skalár esetén $\alpha \cdot u \in U$, valamint
- $\mathbf{0} \in U$.

Definíció: altér.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy U altér V-ben, ha bármely $u, v \in U$ vektorok és $\alpha \in K$ skalár esetén $u + v \in U$, $\alpha \cdot u \in U$ teljesül és $(U; +|_U, \alpha \cdot |_U)$ vektortér K felett.

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U \subseteq V$. Az U részhalmaz pontosan akkor altér V-ben, ha

- bármely $u, v \in U$ vektorok esetén $u + v \in U$,
- bármely $u \in U$ vektor és $\alpha \in K$ skalár esetén $\alpha \cdot u \in U$, valamint
- $\mathbf{0} \in U$.

Jelölés: $U \leqslant V$ (U altér a V vektortérben).

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U_1, U_2 \leqslant V$. Ekkor a következők is alterek V-ben:

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U_1, U_2 \leqslant V$. Ekkor a következők is alterek V-ben:

- $U_1 \cap U_2$,

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U_1, U_2 \leqslant V$. Ekkor a következők is alterek V-ben:

- $U_1 \cap U_2$,
- $U_1 + U_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$.

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U_1, U_2 \leqslant V$. Ekkor a következők is alterek V-ben:

- $U_1 \cap U_2$,
- $U_1 + U_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$.

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U_1, U_2 \leqslant V$. Ekkor a következők is alterek V-ben:

- $U_1 \cap U_2$,
- $U_1 + U_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$.

Sőt, ha $U_i \leqslant V$ $(i \in I)$, akkor $\bigcap_{i \in I} U_i \leqslant V$.

Állítás.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $U_1, U_2 \leqslant V$. Ekkor a következők is alterek V-ben:

- $U_1 \cap U_2$,
- $U_1 + U_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$.

Sőt, ha $U_i \leqslant V$ $(i \in I)$, akkor $\bigcap_{i \in I} U_i \leqslant V$.

Definíció: generált altér.

Legyen $(V; +, \lambda \cdot (\lambda \in K))$ vektortér a K test felett, $H \subseteq V$. Ekkor a $[H] = \bigcap_{H \subseteq U \leqslant V} U$ alteret **a H részhalmaz által generált altérnek** nevezzük.

Állítás.

Legyen V vektortér a K test felett, $H = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Ekkor a $[H] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}$.

Állítás.

Legyen V vektortér a K test felett, $H = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Ekkor a $[H] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}$.

Definíció: generátorrendszer.

Legyen V vektortér a K test felett, $H \subseteq V$. A V vektortér H részhalmaza **generátorrendszer** V-ben, ha $[H] = V$. Ha a V vektortérnek van véges generátorrendszere, akkor azt mondjuk, hogy V **véges dimenziós**.

Állítás.

Legyen V vektortér a K test felett, $H = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Ekkor a $[H] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}$.

Definíció: generátorrendszer.

Legyen V vektortér a K test felett, $H \subseteq V$. A V vektortér H részhalmaza **generátorrendszer** V-ben, ha $[H] = V$. Ha a V vektortérnek van véges generátorrendszere, akkor azt mondjuk, hogy V **véges dimenziós**.

Definíció: bázis.

Legyen V vektortér a K test felett, $H \subseteq V$. A H vektorrendszer **bázis** V-ben, ha a H-beli vektorok lineárisan függetlenek és H generátorrendszere V-nek.

Állítás.

Legyen V tetszőleges véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n$ bázis V-ben és $u \in V$. Ekkor pontosan egy olyan $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ elem n-es van, amelyre $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ teljesül.

Állítás.

Legyen V tetszőleges véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n$ bázis V-ben és $u \in V$. Ekkor pontosan egy olyan $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ elem n-es van, amelyre $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ teljesül.

Állítás.

Legyen V tetszőleges vektortér. Ekkor igazak a következők:

Állítás.

Legyen V tetszőleges véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n$ bázis V-ben és $u \in V$. Ekkor pontosan egy olyan $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ elem n-es van, amelyre $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ teljesül.

Állítás.

Legyen V tetszőleges vektortér. Ekkor igazak a következők:

(a) Lineárisan független vektorrendszer nem tartalmazhatja a zérusvektort.

Állítás.

Legyen V tetszőleges véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n$ bázis V-ben és $u \in V$. Ekkor pontosan egy olyan $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ elem n-es van, amelyre $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ teljesül.

Állítás.

Legyen V tetszőleges vektortér. Ekkor igazak a következők:

(a) Lineárisan független vektorrendszer nem tartalmazhatja a zérusvektort.

(b) Lineárisan független vektorrendszer minden részrendszere is lineárisan független.

Állítás.

Legyen V tetszőleges véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n$ bázis V-ben és $u \in V$. Ekkor pontosan egy olyan $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ elem n-es van, amelyre $u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ teljesül.

Állítás.

Legyen V tetszőleges vektortér. Ekkor igazak a következők:

(a) Lineárisan független vektorrendszer nem tartalmazhatja a zérusvektort.

(b) Lineárisan független vektorrendszer minden részrendszere is lineárisan független.

(c) A $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $v_1 \neq \mathbf{0}$ és minden $i \geqslant 2$-re $v_i \notin [v_1, \ldots, v_{i-1}]$.

Tétel.

Tegyük fel, hogy a V vektortérnek van véges generátorrendszere. Ekkor V bármely két bázisának elemszáma megegyezik.

Tétel.

Tegyük fel, hogy a V vektortérnek van véges generátorrendszere. Ekkor V bármely két bázisának elemszáma megegyezik.

Lemma.

Véges dimenziós vektortér bármely lineárisan független vektorrendszere legfeljebb annyi vektorból áll, mint bármely generátorrendszere.

Tétel.

Tegyük fel, hogy a V vektortérnek van véges generátorrendszere. Ekkor V bármely két bázisának elemszáma megegyezik.

Lemma.

Véges dimenziós vektortér bármely lineárisan független vektorrendszere legfeljebb annyi vektorból áll, mint bármely generátorrendszere.

Definíció: bázis.

Véges dimenziós vektortérben a bázisok közös elemszámát a vektortér **dimenziójának** nevezzük.

Állítás.

Állítás.

(a) Véges dimenziós vektortér bármely generátorrendszeréből kiválasztható bázis.

Állítás.

(a) Véges dimenziós vektortér bármely generátorrendszeréből kiválasztható bázis.

(b) Véges dimenziós vektortér bármely lineáris független vektorrendszere kiegészíthető bázissá.

Állítás.

(a) Véges dimenziós vektortér bármely generátorrendszeréből kiválasztható bázis.

(b) Véges dimenziós vektortér bármely lineáris független vektorrendszere kiegészíthető bázissá.

Következmény.

Legyen V n-dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor ekvivalensek a következők:

Állítás.

(a) Véges dimenziós vektortér bármely generátorrendszeréből kiválasztható bázis.

(b) Véges dimenziós vektortér bármely lineáris független vektorrendszere kiegészíthető bázissá.

Következmény.

Legyen V n-dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor ekvivalensek a következők:

(a) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis.

Állítás.

(a) Véges dimenziós vektortér bármely generátorrendszeréből kiválasztható bázis.

(b) Véges dimenziós vektortér bármely lineáris független vektorrendszere kiegészíthető bázissá.

Következmény.

Legyen V n-dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor ekvivalensek a következők:

(a) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis.

(b) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineáris független.

Állítás.

(a) Véges dimenziós vektortér bármely generátorrendszeréből kiválasztható bázis.

(b) Véges dimenziós vektortér bármely lineáris független vektorrendszere kiegészíthető bázissá.

Következmény.

Legyen V n-dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor ekvivalensek a következők:

(a) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis.

(b) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineáris független.

(c) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer generátorrendszer.

Tétel.

Legyen V véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor ekvivalensek a következők:

Tétel.

Legyen V véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor ekvivalensek a következők:

(a) A $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineárisan független, de $v_1, \ldots, v_n$ minden olyan részrendszere, amely szigorúan bővebb mint a $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer, már lineárisan függő.

Tétel.

Legyen V véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor ekvivalensek a következők:

(a) A $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineárisan független, de $v_1, \ldots, v_n$ minden olyan részrendszere, amely szigorúan bővebb mint a $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer, már lineárisan függő.

(b) A $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineáris független és $v_{r+1}, \ldots, v_n \in [v_1, \ldots, v_r]$.

Tétel.

Legyen V véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor ekvivalensek a következők:

(a) A $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineárisan független, de $v_1, \ldots, v_n$ minden olyan részrendszere, amely szigorúan bővebb mint a $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer, már lineárisan függő.

(b) A $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineáris független és $v_{r+1}, \ldots, v_n \in [v_1, \ldots, v_r]$.

(c) A $v_1, \ldots, v_r$ a $[v_1, \ldots, v_n]$ altér bázisa.

Tétel.

Legyen V véges dimenziós vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor ekvivalensek a következők:

(a) A $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineárisan független, de $v_1, \ldots, v_n$ minden olyan részrendszere, amely szigorúan bővebb mint a $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer, már lineárisan függő.

(b) A $v_1, \ldots, v_r$ vektorrendszer lineáris független és $v_{r+1}, \ldots, v_n \in [v_1, \ldots, v_r]$.

(c) A $v_1, \ldots, v_r$ a $[v_1, \ldots, v_n]$ altér bázisa.

Következmény.

Tetszőleges V véges dimenziós vektortérben bármely $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer bármely két maximális lineárisan független részrendszere ugyanannyi vektorból áll.

Definíció: vektorrendszer rangja.

Legyen V tetszőleges vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. A $v_1, \ldots, v_n$ **vektorrendszer rangja** a maximális lineárisan független részrendszereinek elemszáma.

Definíció: elemi átalakítások.

Legyen V vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor az elemi átalakítások a következők:

Definíció: elemi átalakítások.

Legyen V vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor az elemi átalakítások a következők:

(1) két vektor cseréje $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$:

$$v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n \rightsquigarrow v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n.$$

Definíció: elemi átalakítások.

Legyen V vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor az elemi átalakítások a következők:

(1) két vektor cseréje $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$:
$v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n \rightsquigarrow v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n$.

(2) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer valamely vektorát megszorozzuk az $\alpha \neq 0$ skalárral $(1 \leqslant i \leqslant n)$: $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n \rightsquigarrow v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_n$.

Definíció: elemi átalakítások.

Legyen V vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor az elemi átalakítások a következők:

(1) két vektor cseréje $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$:
$v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n \rightsquigarrow v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n$.

(2) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer valamely vektorát megszorozzuk az $\alpha \neq 0$ skalárral $(1 \leqslant i \leqslant n)$: $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n \rightsquigarrow v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_n$.

(3) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer valamely vektorához hozzáadjuk egy másik vektor skalárszorosát $(1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j,\ \alpha \in K)$:
$v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n \rightsquigarrow v_1, \ldots, v_i + \alpha \cdot v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n$.

Definíció: elemi átalakítások.

Legyen V vektortér, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ekkor az elemi átalakítások a következők:

(1) két vektor cseréje $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$:
$v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n \rightsquigarrow v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n$.

(2) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer valamely vektorát megszorozzuk az $\alpha \neq 0$ skalárral $(1 \leqslant i \leqslant n)$: $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n \rightsquigarrow v_1, \ldots, \alpha \cdot v_i, \ldots, v_n$.

(3) A $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer valamely vektorához hozzáadjuk egy másik vektor skalárszorosát $(1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j,\ \alpha \in K)$:
$v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n \rightsquigarrow v_1, \ldots, v_i + \alpha \cdot v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n$.

Állítás.

Elemi átalakítások során a vektorrendszer rangja nem változik.

Tétel.

Legyen V véges dmenziós vektortér, $U, W \leqslant V$. Ekkor

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Definíció: lineáris leképezés.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$. Azt mondjuk, hogy φ **lineáris leképezés**, ha bármely $u, v \in V$-re és bármely $\alpha \in K$ skalárra teljesül, hogy

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) \qquad \text{és} \qquad \varphi(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot \varphi(u).$$

Ha $W = V$, akkor φ-t **lineáris transzformációnak** nevezzük.

Definíció: magtér, képtér.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor φ magtere $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$, illetve képtere $\mathrm{Im}\,(\varphi)$:

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathbf{0}\}\,, \qquad \mathrm{Im}\,(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}\,.$$

Definíció: magtér, képtér.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor φ magtere $\mathrm{Ker}(\varphi)$, illetve képtere $\mathrm{Im}(\varphi)$:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathbf{0}\}, \qquad \mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}.$$

Tétel.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor

Definíció: magtér, képtér.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor φ magtere $\mathrm{Ker}(\varphi)$, illetve képtere $\mathrm{Im}(\varphi)$:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathbf{0}\}, \qquad \mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}.$$

Tétel.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor

Definíció: magtér, képtér.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor φ magtere $\operatorname{Ker}(\varphi)$, illetve képtere $\operatorname{Im}(\varphi)$:

$$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathbf{0}\}, \qquad \operatorname{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V\}.$$

Tétel.

Legyenek V és W vektorterek a K test felett, $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. Ekkor

$$\dim \operatorname{Ker}(\varphi) + \dim \operatorname{Im}(\varphi) = \dim V.$$