Diszkrét matematika III.

Determinánsok

2009. április 24.

Definíció: n-edfokú szimmetrikus csoport.

$$S_n = \{\pi \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \pi \text{ bijektív}\} .$$

Definíció: n-edfokú szimmetrikus csoport.

$$S_n = \{\pi \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \pi \text{ bijektív}\}.$$

Definíció: permutáció paritása.

Tetszőleges $\pi \in S_n$-re legyen σ az alábbi leképezés:

$$\operatorname{sgn} \colon S_n \to \{-1, 1\}, \ \pi \mapsto \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{j\pi - i\pi}{j - i}.$$

Azt mondjuk, hogy a π permutáció **páros**, ha $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$. Ellenkező esetben π **páratlan**.

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Ekkor

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Ekkor

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\pi) &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \frac{j\pi - i\pi}{j - i} \\
&= \frac{4\pi - 3\pi}{4-3} \cdot \frac{4\pi - 2\pi}{4-2} \cdot \frac{4\pi - 1\pi}{4-1} \cdot \frac{3\pi - 2\pi}{3-2} \cdot \frac{3\pi - 1\pi}{3-1} \cdot \frac{2\pi - 1\pi}{2-1} \\
&= \frac{4-1}{4-3} \cdot \frac{4-3}{4-2} \cdot \frac{4-2}{4-1} \cdot \frac{1-3}{3-2} \cdot \frac{1-2}{3-1} \cdot \frac{3-2}{2-1} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Ekkor

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\pi) &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \frac{j\pi - i\pi}{j-i} \\ &= \frac{4\pi-3\pi}{4-3}\cdot\frac{4\pi-2\pi}{4-2}\cdot\frac{4\pi-1\pi}{4-1}\cdot\frac{3\pi-2\pi}{3-2}\cdot\frac{3\pi-1\pi}{3-1}\cdot\frac{2\pi-1\pi}{2-1} \\ &= \frac{4-1}{4-3}\cdot\frac{4-3}{4-2}\cdot\frac{4-2}{4-1}\cdot\frac{1-3}{3-2}\cdot\frac{1-2}{3-1}\cdot\frac{3-2}{2-1} \\ &= 1,\end{aligned}$$

ezért a π permutáció páros.

Állítás.

Legyen $\tau \in S_n$ tetszőleges transzpozíció, $\sigma \in S_n$. Ekkor $\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Állítás.

Legyen $\tau \in S_n$ tetszőleges transzpozíció, $\sigma \in S_n$. Ekkor $\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Következmény.

Ha $\gamma \in S_n$ ℓ-hosszú ciklus, akkor $\mathrm{sgn}(\gamma) = (-1)^{\ell-1}$.

Állítás.

Legyen $\tau \in S_n$ tetszőleges transzpozíció, $\sigma \in S_n$. Ekkor $\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Következmény.

Ha $\gamma \in S_n$ ℓ-hosszú ciklus, akkor $\mathrm{sgn}(\gamma) = (-1)^{\ell-1}$.

Definíció.

Legyen $\sigma \in S_n$ tetszőleges permutáció, valamint legyenek $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tetszőleges egészek. Azt mondjuk i **inverzióban áll** j**-vel** (σ-ban), ha $i\sigma > j\sigma$. Legyen $\mathrm{inv}(\sigma) = |\{(i,j) \mid i \text{ és } j \text{ inverzióban állnak } \sigma\text{-ban}\}|$.

Állítás.

Legyen $\tau \in S_n$ tetszőleges transzpozíció, $\sigma \in S_n$. Ekkor $\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Következmény.

Ha $\gamma \in S_n$ ℓ-hosszú ciklus, akkor $\mathrm{sgn}(\gamma) = (-1)^{\ell-1}$.

Definíció.

Legyen $\sigma \in S_n$ tetszőleges permutáció, valamint legyenek $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tetszőleges egészek. Azt mondjuk i **inverzióban áll j-vel** (σ-ban), ha $i\sigma > j\sigma$. Legyen $\mathrm{inv}(\sigma) = |\{(i,j) \mid i \text{ és } j \text{ inverzióban állnak } \sigma\text{-ban}\}|$.

Következmény.

Tetszőleges σ permutációra $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}$.

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i,j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1,2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$,

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i,j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1,2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1,3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$,

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$, (inverzió)

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $1 < 4$ és $1\pi = 2 < 4\pi = 4$,

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $1 < 4$ és $1\pi = 2 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $2 < 3$ és $2\pi = 3 > 3\pi = 1$,

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $1 < 4$ és $1\pi = 2 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $2 < 3$ és $2\pi = 3 > 3\pi = 1$,

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $1 < 4$ és $1\pi = 2 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $2 < 3$ és $2\pi = 3 > 3\pi = 1$, (inverzió)

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $1 < 4$ és $1\pi = 2 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $2 < 3$ és $2\pi = 3 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $2 < 4$ és $2\pi = 3 < 4\pi = 4$,

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $1 < 4$ és $1\pi = 2 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $2 < 3$ és $2\pi = 3 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $2 < 4$ és $2\pi = 3 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $3 < 4$ és $3\pi = 1 < 4\pi = 4$,

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $1 < 4$ és $1\pi = 2 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $2 < 3$ és $2\pi = 3 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $2 < 4$ és $2\pi = 3 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $3 < 4$ és $3\pi = 1 < 4\pi = 4$,

Példa.

Legyen $\pi = (1\,2\,3) \in S_4$. Tekintsük az (i, j) párokat, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant 4$:

$(1, 2)$: $1 < 2$ és $1\pi = 2 < 2\pi = 3$,

$(1, 3)$: $1 < 3$ és $1\pi = 2 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $1 < 4$ és $1\pi = 2 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $2 < 3$ és $2\pi = 3 > 3\pi = 1$, (inverzió)

$(1, 2)$: $2 < 4$ és $2\pi = 3 < 4\pi = 4$,

$(1, 2)$: $3 < 4$ és $3\pi = 1 < 4\pi = 4$,

így $\mathrm{inv}(\pi) = 2$, azaz $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{\mathrm{inv}(\pi)} = 1$.

Definíció: négyzetes mátrix determinánsa.

Legyen n természetes szám, K számtest és $A = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$. Ekkor az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot a_{1,\,1\pi} \cdots a_{n,\,n\pi}.$$

Definíció: négyzetes mátrix determinánsa.

Legyen n természetes szám, K számtest és $A = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$. Ekkor az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,\,1\pi} \cdots a_{n,\,n\pi}.$$

Példa.

Definíció: négyzetes mátrix determinánsa.

Legyen n természetes szám, K számtest és $A = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$. Ekkor az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot a_{1,\,1\pi} \cdots a_{n,\,n\pi}.$$

Példa.

Definíció: négyzetes mátrix determinánsa.

Legyen n természetes szám, K számtest és $A = (a_{i,j}) \in K^{n \times n}$. Ekkor az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{1,\,1\pi} \cdots a_{n,\,n\pi}.$$

Példa.

$\det(a_{1,1}) = a_{1,1}$

Definíció: négyzetes mátrix determinánsa.

Legyen n természetes szám, K számtest és $A = (a_{i,j}) \in K^{n\times n}$. Ekkor az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot a_{1,1\pi} \cdots a_{n,n\pi}.$$

Példa.

$\det(a_{1,1}) = a_{1,1}$

$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{1,1}a_{2,2} + \mathrm{sgn}(1\,2) \cdot a_{1,2}a_{2,1} =$
$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$

Példa (folytatás).

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

Példa (folytatás).

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

Példa (folytatás).

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+$

Példa (folytatás).

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+$

$\mathrm{sgn}(1\,2\,3) \cdot a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+$

Példa (folytatás).

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+$

$\mathrm{sgn}(1\,2\,3) \cdot a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+$

$\mathrm{sgn}(1\,3\,2) \cdot a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}+$

Példa (folytatás).

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+$

$\mathrm{sgn}(1\,2\,3) \cdot a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+$

$\mathrm{sgn}(1\,3\,2) \cdot a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}+$

$\mathrm{sgn}(1\,2) \cdot a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}+$

Példa (folytatás).

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+$
$\mathrm{sgn}(1\,2\,3) \cdot a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+$
$\mathrm{sgn}(1\,3\,2) \cdot a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}+$
$\mathrm{sgn}(1\,2) \cdot a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}+$
$\mathrm{sgn}(1\,3) \cdot a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}+$

Példa (folytatás).

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+$
$\mathrm{sgn}(1\,2\,3) \cdot a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+$
$\mathrm{sgn}(1\,3\,2) \cdot a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}+$
$\mathrm{sgn}(1\,2) \cdot a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}+$
$\mathrm{sgn}(1\,3) \cdot a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}+$
$\mathrm{sgn}(2\,3) \cdot a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} =$

Példa (folytatás).

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+$

$\mathrm{sgn}(1\,2\,3) \cdot a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+$

$\mathrm{sgn}(1\,3\,2) \cdot a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}+$

$\mathrm{sgn}(1\,2) \cdot a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}+$

$\mathrm{sgn}(1\,3) \cdot a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}+$

$\mathrm{sgn}(2\,3) \cdot a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} =$

$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$

Példa (folytatás).

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} =$$

$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+$
$\mathrm{sgn}(1\,2\,3) \cdot a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+$
$\mathrm{sgn}(1\,3\,2) \cdot a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}+$
$\mathrm{sgn}(1\,2) \cdot a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}+$
$\mathrm{sgn}(1\,3) \cdot a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}+$
$\mathrm{sgn}(2\,3) \cdot a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} =$
$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$
$-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$.

Definíció: mátrixok elemi átalakításai.

Legyen K számtest, $m, n \in \mathbb{N}$ és $A \in K^{m \times n}$.

Definíció: mátrixok elemi átalakításai.

Legyen K számtest, $m, n \in \mathbb{N}$ és $A \in K^{m \times n}$.

(a) az A mátrix i-edik és j-edik sorának [oszlopának] cseréje: $A_{i \overset{r}{\leftrightsquigarrow} j}$ $[A_{i \overset{c}{\leftrightsquigarrow} j}]$

Definíció: mátrixok elemi átalakításai.

Legyen K számtest, $m, n \in \mathbb{N}$ és $A \in K^{m \times n}$.

(a) az A mátrix i-edik és j-edik sorának [oszlopának] cseréje: $A_{i \overset{r}{\leftrightsquigarrow} j}$ $[A_{i \overset{c}{\leftrightsquigarrow} j}]$

(b) az A mátrix i-edik sorát [oszlopát] megszorozzuk egy $\alpha \in K$ konstanssal: $A_{i \overset{r}{\rightsquigarrow} \alpha \cdot i}$ $[A_{i \overset{c}{\rightsquigarrow} \alpha \cdot i}]$

Definíció: mátrixok elemi átalakításai.

Legyen K számtest, $m, n \in \mathbb{N}$ és $A \in K^{m \times n}$.

(a) az A mátrix i-edik és j-edik sorának [oszlopának] cseréje: $A_{i \overset{r}{\leftrightsquigarrow} j}$ $[A_{i \overset{c}{\leftrightsquigarrow} j}]$

(b) az A mátrix i-edik sorát [oszlopát] megszorozzuk egy $\alpha \in K$ konstanssal: $A_{i \overset{r}{\rightsquigarrow} \alpha \cdot i}$ $[A_{i \overset{c}{\rightsquigarrow} \alpha \cdot i}]$

(c) az A mátrix i-edik sorának [oszlopának] α-szorosát hozzáadjuk a j-edik sorhoz [oszlophoz] ($\alpha \in K$): $A_{i \overset{r}{\rightsquigarrow} j+\alpha \cdot i}$ $[A_{i \overset{c}{\rightsquigarrow} j+\alpha \cdot i}]$

Tétel (a determináns tulajdonságai).

Legyen K számtest, $\alpha \in K$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $(i \neq j)$ és $A \in K^{n \times n}$, valamint legyen $* \in \{r, c\}$. Ekkor igazak a következők:

Tétel (a determináns tulajdonságai).

Legyen K számtest, $\alpha \in K$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $(i \neq j)$ és $A \in K^{n \times n}$, valamint legyen $* \in \{r, c\}$. Ekkor igazak a következők:

(a) $\det(A_{i \overset{*}{\leftrightsquigarrow} j}) = -\det(A)$,

Tétel (a determináns tulajdonságai).

Legyen K számtest, $\alpha \in K$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $(i \neq j)$ és $A \in K^{n \times n}$, valamint legyen $* \in \{r, c\}$. Ekkor igazak a következők:

(a) $\det(A_{i \overset{*}{\leftrightsquigarrow} j}) = -\det(A)$,

(b) $\det(A_{i \overset{*}{\rightsquigarrow} \alpha \cdot i}) = \alpha \cdot \det(A)$,

Tétel (a determináns tulajdonságai).

Legyen K számtest, $\alpha \in K$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $(i \neq j)$ és $A \in K^{n \times n}$, valamint legyen $* \in \{r, c\}$. Ekkor igazak a következők:

(a) $\det(A_{i \overset{*}{\leftrightsquigarrow} j}) = -\det(A)$,

(b) $\det(A_{i \overset{*}{\rightsquigarrow} \alpha \cdot i}) = \alpha \cdot \det(A)$,

(c) $\det(A_{i \overset{*}{\rightsquigarrow} j + \alpha \cdot i}) = \det(A)$.

Definíció: Vandermonde-determináns.

Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges K-beli elemek. Ekkor a $V(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ Vandermonde-determináns a következő:

$$V(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Tétel.

Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges K testbeli elemek. Ekkor

$$V(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Tétel.

Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges K testbeli elemek. Ekkor

$$V(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Következmény.

Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges K testbeli elemek. Ekkor

$$V(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0 \iff \text{van olyan } i, j \ (1 \leqslant i < j \leqslant n), \text{ amelyre } a_i = a_j.$$

Bizonyítás.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =$$

Bizonyítás.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} =$$

Bizonyítás.

$$\det\begin{pmatrix}1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n - a_0 a_0^{n-1}\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n - a_0 a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n - a_0 a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n - a_0 a_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n - a_0 a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} - a_0 a_0^{n-2} & a_0^n - a_0 a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 - a_0 a_0 & \cdots & a_0^{n-1} - a_0 a_0^{n-2} & a_0^n - a_0 a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 - a_0 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 - a_0 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 - a_0 a_0 & \cdots & a_0^{n-1} - a_0 a_0^{n-2} & a_0^n - a_0 a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 - a_0 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 - a_0 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 - a_0 a_0 & \cdots & a_0^{n-1} - a_0 a_0^{n-2} & a_0^n - a_0 a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 - a_0 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 - a_0 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & a_0 - a_0 & a_0^2 - a_0 a_0 & \cdots & a_0^{n-1} - a_0 a_0^{n-2} & a_0^n - a_0 a_0^{n-1} \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_0 & a_2^2 - a_0 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_0 & a_n^2 - a_0 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_0 & a_2^2 - a_0 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_0 & a_n^2 - a_0 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_0 & a_2^2 - a_0 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_0 & a_n^2 - a_0 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_0 & a_2^2 - a_0 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_0 & a_n^2 - a_0 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 - a_0 & a_1(a_1 - a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_0) & a_1^{n-1}(a_1 - a_0) \\ a_2 - a_0 & a_2(a_2 - a_0) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_0) & a_2^{n-1}(a_2 - a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_0 & a_n(a_n - a_0) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_0) & a_n^{n-1}(a_n - a_0) \end{pmatrix}$$

Bizonyítás.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_0 & a_2^2 - a_0 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_0 & a_n^2 - a_0 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 - a_0 & a_1(a_1 - a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_0) & a_1^{n-1}(a_1 - a_0) \\ a_2 - a_0 & a_2(a_2 - a_0) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_0) & a_2^{n-1}(a_2 - a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_0 & a_n(a_n - a_0) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_0) & a_n^{n-1}(a_n - a_0) \end{pmatrix}$$

$$= (a_1 - a_0) \cdots (a_n - a_0) \cdot V(a_1, \ldots, a_n).$$

Bizonyítás.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 - a_0 & a_1^2 - a_0 a_1 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_0 & a_2^2 - a_0 a_2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_0 a_2^{n-2} & a_2^n - a_0 a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_0 & a_n^2 - a_0 a_n & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_1 - a_0 & a_1(a_1 - a_0) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_0) & a_1^{n-1}(a_1 - a_0) \\ a_2 - a_0 & a_2(a_2 - a_0) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_0) & a_2^{n-1}(a_2 - a_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_0 & a_n(a_n - a_0) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_0) & a_n^{n-1}(a_n - a_0) \end{pmatrix}$$

$$= (a_1 - a_0) \cdots (a_n - a_0) \cdot V(a_1, \ldots, a_n).$$

Q.E.D.