Diszkrét matematika III.

Komplex számok

2009. április 24.

A természetes számok: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$.

Jó tulajdonság:

$$5 \in \mathbb{N} \quad \text{és} \quad 7 \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad 5 + 7 \in \mathbb{N}.$$

Kevésbé jó, hogy

$$5 - 7 \notin \mathbb{N}.$$

Az egész számok: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$.

Jó tulajdonság:

$$5 \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad 7 \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad 5 \pm 7 \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad 5 \cdot 7 \in \mathbb{Z}.$$

Kevésbé jó, hogy

$$5/7 \notin \mathbb{Z}.$$

A racionális számok: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$.

Ha $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ és $b, d \neq 0$, akkor $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ és

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} a \cdot d = b \cdot c.$$

Jó tulajdonság:

$$\frac{5}{7} \in \mathbb{Q} \quad \text{és} \quad \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{7} \pm \frac{2}{3} \in \mathbb{Q},\ \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \quad \text{és} \quad \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{15}{14} \in \mathbb{Q},$$

azaz $\mathbb{Q}$ zárt az alapműveletekre.
Kevésbé jó, hogy nincs olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $r^2 = 2$ teljesül.

A valós számok: $\mathbb{R} = \{\lim_{n\to\infty} r_n \mid (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens $\mathbb{Q}$-sorozat$\}$.

Jó tulajdonság: $\mathbb{R}$ zárt az alapműveletekre és $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ is teljesül, mivel

$$\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} r_n,$$

ahol $r_1 = 1$ és $r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Kevésbé jó, hogy nincs olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $\alpha^2 = -1$ teljesülne.

Definíció: komplex számok.

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az

$$a + bi$$

formális kifejezést **komplex számnak** nevezzük, ahol $i^2 = -1$.
Az összes komplex számok $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ halmazát pedig $\mathbb{C}$-vel jelöljük.
Az $a + bi$ és $c + di$ komplex számok pontosan akkor egyenlők, ha $a = c$ és $b = d$.

Definíció: komplex számok.

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az

$$a + bi$$

formális kifejezést **komplex számnak** nevezzük, ahol $i^2 = -1$.
Az összes komplex számok $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ halmazát pedig $\mathbb{C}$-vel jelöljük.
Az $a + bi$ és $c + di$ komplex számok pontosan akkor egyenlők, ha $a = c$ és $b = d$.

Állítás.

Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ komplex szám egyértelműen írható fel $a + bi$ alakban, ahol a és b valós számok.

Definíció: komplex szám kanonikus alakja, valós rész és képzetes rész.

Legyen $z \in \mathbb{C}$ komplex szám, ekkor vannak olyan egyértelműen meghatározott a és b valós számok, amelyekre $z = a + bi$ teljesül. Ezt az alakot a z komplex szám **kanonikus alakjának** nevezzük. Az a valós szám a z komplex szám **valós része**, a b való szám pedig z **képzetes része**. A z komplex szám valós részét $\mathrm{Re}(z)$-vel, képzetes részét pedig $\mathrm{Im}(z)$-vel jelöljük:

$$\mathrm{Re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \mathrm{Re}(z),$$
$$\mathrm{Im}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \mathrm{Im}(z).$$

Definíció: műveletek komplex számokkal.

Definiáljuk az alábbi műveleteket a $\mathbb{C}$ halmazon:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$
$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i,$$

valamint legyen $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ a+bi \mapsto \overline{z} = a-bi$ (**konjugálás**).

Tétel.

A $(\mathbb{C};+,\cdot)$ algebra test, azaz

Tétel.

A $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ algebra test, azaz

$(\mathbb{C}; +)$ Abel-csoport,

Tétel.

A $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ algebra test, azaz

$(\mathbb{C}; +)$ Abel-csoport,

$(\mathbb{C} \setminus \{0 + 0i\}; \cdot)$ csoport és

Tétel.

A $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ algebra test, azaz

- $(\mathbb{C}; +)$ Abel-csoport,
- $(\mathbb{C} \setminus \{0 + 0i\}; \cdot)$ csoport és
- a $\cdot$ művelet disztributív az $+$ műveletre vonatkozóan.

Tétel.

A $(\mathbb{C};\, +\,,\, \cdot\,)$ algebra test, azaz

$(\mathbb{C};\, +\,)$ Abel-csoport,

$(\mathbb{C} \setminus \{0 + 0i\};\, \cdot\,)$ csoport és

a $\cdot$ művelet disztributív az $+$ műveletre vonatkozóan.

Tétel.

A $\imath \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ a \mapsto a + 0i$ leképezés injektív homomorfizmus.

Tétel.

A $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ algebra test, azaz

- $(\mathbb{C}; +)$ Abel-csoport,
- $(\mathbb{C} \setminus \{0 + 0i\}; \cdot)$ csoport és
- a $\cdot$ művelet disztributív az $+$ műveletre vonatkozóan.

Tétel.

A $\mathfrak{i} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ a \mapsto a + 0i$ leképezés injektív homomorfizmus.

Az a valós számot azonosítjuk az $\mathfrak{i}(a) = a + 0i$ komplex számmal, és ezen azonosítás után úgy tekintjük, hogy $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$$u + v \in H,$$

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$$u + v \in H,$$

$$u - v \in H,$$

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$$u + v \in H,$$

$$u - v \in H,$$

$u \cdot v$ és

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$u + v \in H$,

$u - v \in H$,

$u \cdot v$ és

$u/v \in H$, ha $v \neq 0$.

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$u + v \in H$,

$u - v \in H$,

$u \cdot v$ és

$u/v \in H$, ha $v \neq 0$.

Példa: számtestek.

A komlex számtest alábbi részhalmazai mind számtestek:

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$u + v \in H$,

$u - v \in H$,

$u \cdot v$ és

$u/v \in H$, ha $v \neq 0$.

Példa: számtestek.

A komlex számtest alábbi részhalmazai mind számtestek:

- a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza, a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza,

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$u + v \in H$,

$u - v \in H$,

$u \cdot v$ és

$u/v \in H$, ha $v \neq 0$.

Példa: számtestek.

A komlex számtest alábbi részhalmazai mind számtestek:

- a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza, a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$,

Definíció: számtest.

A komplex számtest H részhalmazát **számtestnek** nevezzük, ha H zárt a négy alapműveletre, azaz tetszőleges $u, v \in H$ esetén

$u + v \in H$,

$u - v \in H$,

$u \cdot v$ és

$u/v \in H$, ha $v \neq 0$.

Példa: számtestek.

A komlex számtest alábbi részhalmazai mind számtestek:

- a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza, a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza,
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a+bi) \cdot (a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tétel.

Tetszőleges v, w komplex számokra teljesülnek a következők:

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a + bi) \cdot (a - bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tétel.

Tetszőleges v, w komplex számokra teljesülnek a következők:

(1) $\overline{v \pm w} = \overline{v} \pm \overline{w}$,

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a + bi) \cdot (a - bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tétel.

Tetszőleges v, w komplex számokra teljesülnek a következők:

(1) $\overline{v \pm w} = \overline{v} \pm \overline{w}$,

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Tétel.

Tetszőleges v, w komplex számokra teljesülnek a következők:

(1) $\overline{v \pm w} = \overline{v} \pm \overline{w}, \quad \overline{v \cdot w} = \overline{v} \cdot \overline{w},$

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a+bi) \cdot (a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tétel.

Tetszőleges v, w komplex számokra teljesülnek a következők:

(1) $\overline{v \pm w} = \overline{v} \pm \overline{w}$, $\overline{v \cdot w} = \overline{v} \cdot \overline{w}$, $\overline{\left(\frac{v}{w}\right)} = \frac{\overline{v}}{\overline{w}}$ (ha $w \neq 0$),

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a + bi) \cdot (a - bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tétel.

Tetszőleges v, w komplex számokra teljesülnek a következők:

(1) $\overline{v \pm w} = \overline{v} \pm \overline{w}$, $\overline{v \cdot w} = \overline{v} \cdot \overline{w}$, $\overline{\left(\frac{v}{w}\right)} = \frac{\overline{v}}{\overline{w}}$ (ha $w \neq 0$),

(2) $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$,

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Tétel.

Tetszőleges v, w komplex számokra teljesülnek a következők:

(1) $\overline{v \pm w} = \overline{v} \pm \overline{w}, \quad \overline{v \cdot w} = \overline{v} \cdot \overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{v}{w}\right)} = \frac{\overline{v}}{\overline{w}}$ (ha $w \neq 0$),

(2) $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$,

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Tétel.

Tetszőleges v, w komplex számokra teljesülnek a következők:

(1) $\overline{v \pm w} = \overline{v} \pm \overline{w}$, $\overline{v \cdot w} = \overline{v} \cdot \overline{w}$, $\overline{\left(\frac{v}{w}\right)} = \frac{\overline{v}}{\overline{w}}$ (ha $w \neq 0$),

(2) $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$, $\left|\frac{v}{w}\right| = \frac{|v|}{|w|}$ (ha $w \neq 0$),

Definíció: abszolút érték.

A z komplex szám **abszolút értéke**: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. Amennyiben z kanonikus alakja $a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)} = \sqrt{a^2+b^2}$.

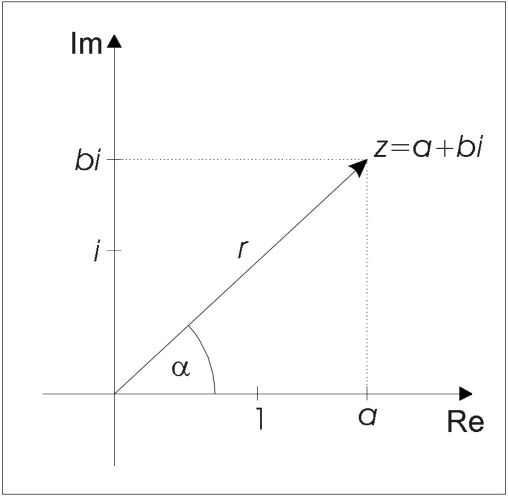
Tétel.

Tetszőleges v, w komplex számokra teljesülnek a következők:

(1) $\overline{v \pm w} = \overline{v} \pm \overline{w}$, $\quad \overline{v \cdot w} = \overline{v} \cdot \overline{w}$, $\quad \overline{\left(\dfrac{v}{w}\right)} = \dfrac{\overline{v}}{\overline{w}}$ (ha $w \neq 0$),

(2) $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$, $\quad \left|\dfrac{v}{w}\right| = \dfrac{|v|}{|w|}$ (ha $w \neq 0$),

(3) $|v + w| \leqslant |v| + |w|$.



1. ábra: A Gauss-féle számsík.

Definíció: komplex szám trigonometrikus alakja.

Legyen z tetszőleges 0-tól különböző komplex szám. Ekkor z felírható

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

alakban, ahol $r = |z|$ és φ a z komplex szám **argumentuma**. Ezt az alakot z **trigonometrikus alakjának** nevezzük.

Definíció: komplex szám trigonometrikus alakja.

Legyen z tetszőleges 0-tól különböző komplex szám. Ekkor z felírható

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

alakban, ahol $r = |z|$ és φ a z komplex szám **argumentuma**. Ezt az alakot z **trigonometrikus alakjának** nevezzük.

Állítás.

Legyenek z_1 és z_2 tetszőleges 0-tól különböző komplex számok, melyek trigonometrikus alakja $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$ $(k = 1, 2)$. Ekkor $z_1 = z_2$ pontosan akkor teljesül, ha $r_1 = r_2$ és $\varphi_1 - \varphi_2 = 2l\pi$ valamely l egészre.

Tétel.

Legyenek $z_1, z_2 \neq 0$ tetszőleges komplex számok, melyek trigonometrikus alakja $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$ $(k = 1, 2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big),$$
$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}\big(\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)\big).$$

Tétel.

Legyenek $z_1, z_2 \neq 0$ tetszőleges komplex számok, melyek trigonometrikus alakja $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$ $(k = 1, 2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big),$$
$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}\big(\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)\big).$$

Következmény.

Legyen $z \neq 0$ tetszőleges komplex szám, melynek trigonometrikus alakja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, valamint legyen $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor

$$z^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big).$$

Definíció: n-edik gyök.

Legyen $u \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy a z komplex szám n-**edik gyöke** u-nak, ha $z^n = u$.

Definíció: n-edik gyök.

Legyen $u \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy a z komplex szám ***n*-edik gyöke** u-nak, ha $z^n = u$.

Tétel.

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor tetszőleges $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex számnak pontosan n darab n-edik gyöke van. Ha z trigonometrkus alakja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, akkor z n-edik gyökei a következők:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Definíció: *n*-edik egységgyök.

Az 1 komplex szám n-edik gyökeit n-**edik egységgyököknek nevezzük**. Az n-edik egységgyökök a következők:

$$\varepsilon_k^{(n)} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Definíció: *n*-edik egységgyök.

Az 1 komplex szám n-edik gyökeit n-**edik egységgyököknek nevezzük**. Az n-edik egységgyökök a következők:

$$\varepsilon_k^{(n)} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Állítás.

Ha $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ egy n-edik gyöke z_0, akkor $z_0\varepsilon_k^{(n)}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ éppen a z komplex szám n darab n-edik gyöke.

Definíció: primitív n-edik egységgyök.

Az ε n-edik egységgyök **primitív n-edik egységgyök**, ha hatványaiként valamennyi n-edik egységgyök előállítható.

Definíció: primitív n-edik egységgyök.

Az ε n-edik egységgyök **primitív n-edik egységgyök**, ha hatványaiként valamennyi n-edik egységgyök előállítható.

Tétel.

Legyen ε tetszőleges n-edik egységgyök. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

Definíció: primitív n-edik egységgyök.

Az ε n-edik egységgyök **primitív n-edik egységgyök**, ha hatványaiként valamennyi n-edik egységgyök előállítható.

Tétel.

Legyen ε tetszőleges n-edik egységgyök. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

(a) ε primitív n-edik egységgyök;

Definíció: primitív n-edik egységgyök.

Az ε n-edik egységgyök **primitív n-edik egységgyök**, ha hatványaiként valamennyi n-edik egységgyök előállítható.

Tétel.

Legyen ε tetszőleges n-edik egységgyök. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

(a) ε primitív n-edik egységgyök;

(b) az $1 = \varepsilon^0, \varepsilon = \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ komplex számok páronként különbözőek;

Definíció: primitív n-edik egységgyök.

Az ε n-edik egységgyök **primitív** n**-edik egységgyök**, ha hatványaiként valamennyi n-edik egységgyök előállítható.

Tétel.

Legyen ε tetszőleges n-edik egységgyök. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

(a) ε primitív n-edik egységgyök;

(b) az $1 = \varepsilon^0, \varepsilon = \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ komplex számok páronként különbözőek;

(c) $\varepsilon = \varepsilon_k^{(n)}$, ahol $\text{ln.k.o.}(n, k) = 1$.