Magasabbfokú egyenletek és geometriai szerkeszthetőség

Dormán Miklós

SZTE, Bolyai Intézet

2008. október 18.

Magasabbfokú egyenletek és geometriai szerkeszthetőség

Dormán Miklós

Dormán Miklós

- www.math.u-szeged.hu$\backslash\sim$dorman

Magasabbfokú egyenletek és geometriai szerkeszthetőség

Dormán Miklós

- www.math.u-szeged.hu\~dorman
- dorman@math.u-szeged.hu

Dormán Miklós

- www.math.u-szeged.hu\\~dorman
- dorman@math.u-szeged.hu
- Bolyai épület, I. emelet 10.

Dormán Miklós

- www.math.u-szeged.hu\\$\sim$dorman
- dorman@math.u-szeged.hu
- Bolyai épület, I. emelet 10.
- (54)4078

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

1. Az előadásokon és a gyakorlatokon való résztvétel nem kötelező.

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

1. Az előadásokon és a gyakorlatokon való résztvétel nem kötelező.
2. A szorgalmi időszakban zárthelyi dolgozatot nem fogunk írni.

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

1. Az előadásokon és a gyakorlatokon való résztvétel nem kötelező.
2. A szorgalmi időszakban zárthelyi dolgozatot nem fogunk írni.
3. A vizsga két részből áll:

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

1. Az előadásokon és a gyakorlatokon való résztvétel nem kötelező.
2. A szorgalmi időszakban zárthelyi dolgozatot nem fogunk írni.
3. A vizsga két részből áll:
   - írásbeli rész (4 feladat 60 percre)

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

1. Az előadásokon és a gyakorlatokon való résztvétel nem kötelező.
2. A szorgalmi időszakban zárthelyi dolgozatot nem fogunk írni.
3. A vizsga két részből áll:
    - írásbeli rész (4 feladat 60 percre)
    - szóbeli rész (2 tétel, a felkészülési idő legalább 20 perc)

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

1. Az előadásokon és a gyakorlatokon való résztvétel nem kötelező.
2. A szorgalmi időszakban zárthelyi dolgozatot nem fogunk írni.
3. A vizsga két részből áll:
   - írásbeli rész (4 feladat 60 percre)
   - szóbeli rész (2 tétel, a felkészülési idő legalább 20 perc)
4. A végső jegy a két részre kapott pontokból fog adódni:

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

1. Az előadásokon és a gyakorlatokon való résztvétel nem kötelező.
2. A szorgalmi időszakban zárthelyi dolgozatot nem fogunk írni.
3. A vizsga két részből áll:
   - írásbeli rész (4 feladat 60 percre)
   - szóbeli rész (2 tétel, a felkészülési idő legalább 20 perc)
4. A végső jegy a két részre kapott pontokból fog adódni:
   - az írásbeli részre legfeljebb 25 pont,

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

1. Az előadásokon és a gyakorlatokon való résztvétel nem kötelező.
2. A szorgalmi időszakban zárthelyi dolgozatot nem fogunk írni.
3. A vizsga két részből áll:
   - írásbeli rész (4 feladat 60 percre)
   - szóbeli rész (2 tétel, a felkészülési idő legalább 20 perc)
4. A végső jegy a két részre kapott pontokból fog adódni:
   - az írásbeli részre legfeljebb 25 pont,
   - a szóbeli része pedig legfeljebb 75 pont kapható

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

1. Az előadásokon és a gyakorlatokon való résztvétel nem kötelező.
2. A szorgalmi időszakban zárthelyi dolgozatot nem fogunk írni.
3. A vizsga két részből áll:
   - írásbeli rész (4 feladat 60 percre)
   - szóbeli rész (2 tétel, a felkészülési idő legalább 20 perc)
4. A végső jegy a két részre kapott pontokból fog adódni:
   - az írásbeli részre legfeljebb 25 pont,
   - a szóbeli része pedig legfeljebb 75 pont kapható
5. Az írásbeli dolgozat a vizsga része, de nem beugró!

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

Tudnivalók az előadásról és a gyakorlatról

6. A megszerzett pontokból a jegy az alábbi táblázat szerint születik meg:

jeles (5)	$[90, 100]$,
jó (4)	$[75, 90[$,
közepes (3)	$[60, 75[$,
elégséges (2)	$[40, 60[$,
elégtelen (1)	$[0, 40[$.

Ajánlott irodalom

- **Bálintné Szendrei Mária**, **Czédli Gábor**, **Szendrei Ágnes**, *Absztrakt algebrai feladatok*, POLYGON (Szeged, 2005).

Ajánlott irodalom

- **Bálintné Szendrei Mária**, **Czédli Gábor**, **Szendrei Ágnes**, *Absztrakt algebrai feladatok*, POLYGON (Szeged, 2005).
- **Csákány Béla**, *Algebra*, Nemzeti Tankönyvkiadó (1995).

Ajánlott irodalom

- **Bálintné Szendrei Mária**, **Czédli Gábor**, **Szendrei Ágnes**, *Absztrakt algebrai feladatok*, POLYGON (Szeged, 2005).
- **Csákány Béla**, *Algebra*, Nemzeti Tankönyvkiadó (1995).
- **Czédli Gábor**, **Szendrei Ágnes**, *Geometriai szerkeszthetőség*, POLYGON (Szeged, 1997).

Ajánlott irodalom

- **Bálintné Szendrei Mária**, **Czédli Gábor**, **Szendrei Ágnes**, *Absztrakt algebrai feladatok*, POLYGON (Szeged, 2005).
- **Csákány Béla**, *Algebra*, Nemzeti Tankönyvkiadó (1995).
- **Czédli Gábor**, **Szendrei Ágnes**, *Geometriai szerkeszthetőség*, POLYGON (Szeged, 1997).
- **Kiss Emil**, *Bevezetés az algebrába*, TYPOTEX (Budapest, 2007).

Hálók

Definíció

Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b, c \in A$. Azt mondjuk, hogy c **alsó korlátja** [**felső korlátja**] a-nak és b-nek, ha $c \leqslant a, b$ [$a, b \leqslant c$].

Hálók

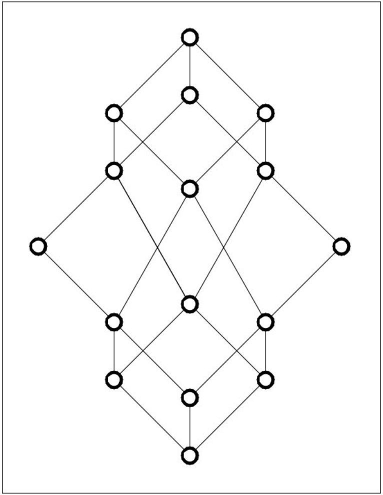
Definíció

Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b, c \in A$. Azt mondjuk, hogy c **alsó korlátja** [**felső korlátja**] a-nak és b-nek, ha $c \leqslant a, b$ $[a, b \leqslant c]$.

Definíció

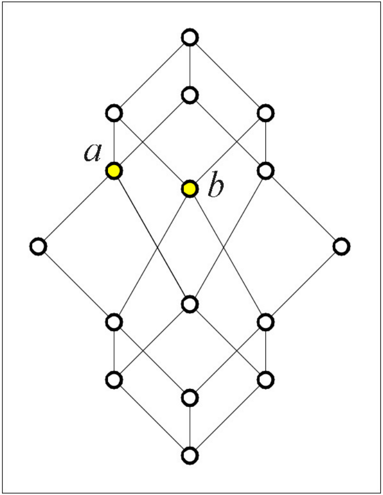
Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b, c_0 \in A$. Azt mondjuk, hogy c_0 **legnagyobb alsó korlátja** [**legkisebb felső korlátja**] a-nak és b-nek, ha $c_0 \leqslant a, b$ $[a, b \leqslant c_0]$ és a, b bármely c alsó korlátjára [felső korlátjára] $c \leqslant c_0$ $[c_0 \leqslant c]$ teljesül.

Hálók



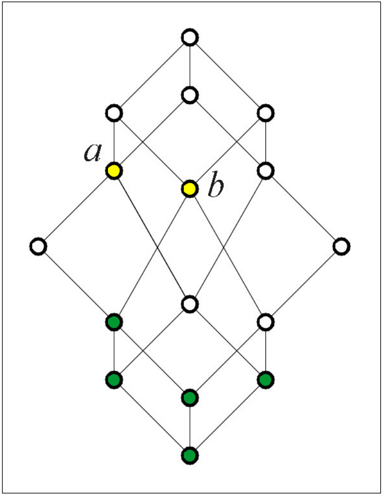
1. ábra: Egy részbenrendezett halmaz.

Hálók



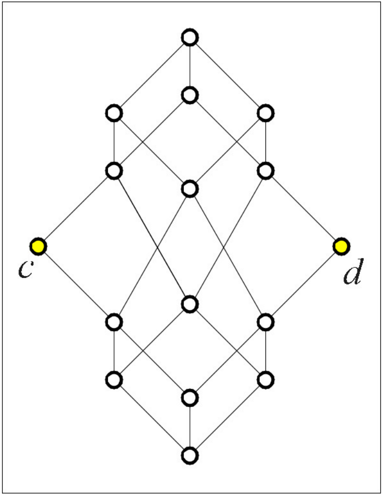
2. ábra: Egy részbenrendezett halmaz.

Hálók



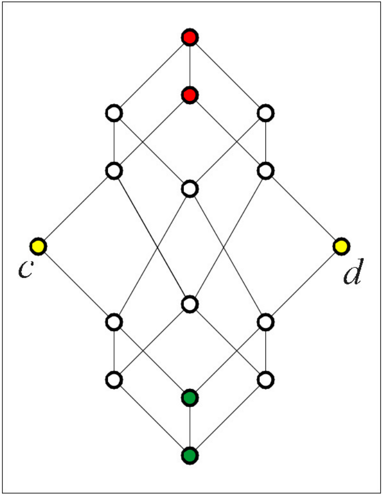
3. ábra: Egy részbenrendezett halmaz.

Hálók



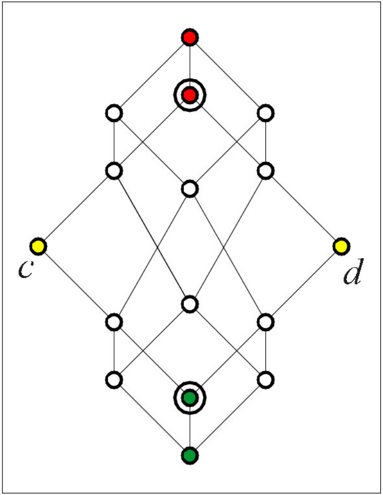
4. ábra: Egy részbenrendezett halmaz.

Hálók



5. ábra: Egy részbenrendezett halmaz.

Hálók



6. ábra: Egy részbenrendezett halmaz.

Hálók

Állítás

Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b \in A$. Ha az a és b elemeknek van legnagyobb alsó korlátja [legkisebb felső lorlátja], akkor az egyértelműen meghatározott.

Hálók

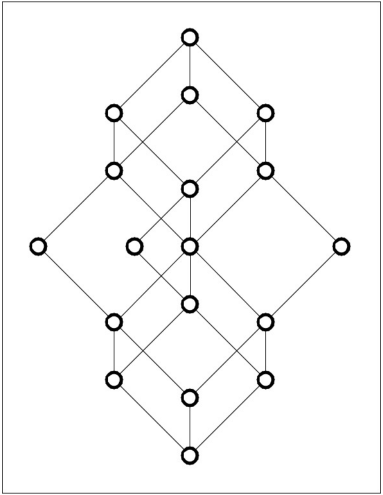
Állítás

Legyen $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmaz és $a, b \in A$. Ha az a és b elemeknek van legnagyobb alsó korlátja [legkisebb felső lorlátja], akkor az egyértelműen meghatározott.

Definíció

Az $(A; \leqslant)$ részbenrendezett halmazt **hálószerűen rendezett halmaznak** hívjuk, ha az A halmaz bármely a és b elemének létezik legnagyobb alsó, illetve legkisebb felső korlátja.

Hálók



7. ábra: Egy hálószerűen rendezett halmaz.

Példák

részbenrendezett halmaz	legnagyobb alsó korlát	legkisebb felső korlát
$(\mathbb{N};\ \mid\ )$	$\mathrm{ln.k.o.}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$	$\mathrm{lk.k.t.}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$,
$(P(U);\ \subseteq\ )$	$X \cap Y$	$X \cup Y$,
$(\mathrm{Sub}({}_K V);\ \subseteq\ )$	$U \cap W$	$U + W$,
$(\mathrm{Sub}(\mathbf{G});\ \subseteq\ )$	$H \cap K$	$\langle H \cup K \rangle$,
$(\mathrm{SubNorm}(\mathbf{G};\ \subseteq\ )$	$M \cap N$	$M \cdot N$.

Hálók

A táblázatban U tetszőleges halmazt jelöl, $X, Y \subseteq U$; $\mathrm{Sub}({}_K V)$ a K test feletti ${}_K V$ vektortér altereinek halmaza, U és W alterei ${}_K V$-nek, $U + W$ ezen alterek komplexus összege; $\mathrm{Sub}(\mathbf{G})$ a $\mathbf{G}$ csoport részcsoportjainak halmaza, H és K részcsoportjai $\mathbf{G}$-nek, $\langle H \cup K \rangle$ pedig az ezen részcsoportok egyesítése által generált részcsoport; $\mathrm{SubNorm}(\mathbf{G})$ a $\mathbf{G}$ csoport normális részcsoportjainak halmaza, M és N normális részcsoportjai $\mathbf{G}$-nek, $M \cdot N$ pedig ezen normális részcsoportok komplexus szorzata.

Hálóazonosságok

Definíció

Legyen $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz. Az L halmazon definiáljuk a $\wedge$ és $\vee$ műveleteket az alábbi módon:

$$\wedge\colon L \times L \to L,\ (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legnagyobb alsó korlátja},$$
$$\vee\colon L \times L \to L,\ (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legkisebb felső korlátja}.$$

Hálóazonosságok

Állítás

Bármely $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz tetszőleges a, b, c elemeire teljesülnek az alábbiak:

$$
\begin{aligned}
a \wedge a &= a, & a \vee a &= a & &\text{(idempotencia)},\\
a \wedge b &= b \wedge a, & a \vee b &= b \vee a & &\text{(kommutativitás)},\\
(a \wedge b) \wedge c &= a \wedge (b \wedge c), & (a \vee b) \vee c &= a \vee (b \vee c) & &\text{(asszociativitás)},\\
(a \wedge b) \vee b &= b, & (a \vee b) \wedge b &= b & &\text{(abszorptivitás)}.
\end{aligned}
$$

Hálóazonosságok

Állítás

Bármely $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz tetszőleges a, b, c elemeire teljesülnek az alábbiak:

$$
\begin{array}{ccr}
a \wedge a = a, & a \vee a = a & \text{(idempotencia)}, \\
a \wedge b = b \wedge a, & a \vee b = b \vee a & \text{(kommutativitás)}, \\
(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), & (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) & \text{(asszociativitás)}, \\
(a \wedge b) \vee b = b, & (a \vee b) \wedge b = b & \text{(abszorptivitás)}.
\end{array}
$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $(L; \wedge, \vee)$ algebra **háló**, ha tetszőleges $a, b, c \in L$ elemekre teljesülnek a fenti egyenlőségek.

Hálóazonosságok

Tétel

Legyen $(L; \leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz. Ekkor $(L; \wedge, \vee)$ háló, ahol $\wedge$ és $\vee$ a

$$\wedge\colon L \times L \to L, \quad (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legnagyobb alsó korlátja},$$
$$\vee\colon L \times L \to L, \quad (a, b) \mapsto a \text{ és } b \text{ legkisebb felső korlátja}.$$

műveletek.

Hálóazonosságok

Tétel

Legyen $(L;\leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz. Ekkor $(L;\wedge,\vee)$ háló, ahol $\wedge$ és $\vee$ a

$$\wedge\colon L\times L\to L,\ (a,b)\mapsto a \text{ és } b \text{ legnagyobb alsó korlátja},$$
$$\vee\colon L\times L\to L,\ (a,b)\mapsto a \text{ és } b \text{ legkisebb felső korlátja}.$$

műveletek.

Tétel

Legyen $(L;\wedge,\vee)$ háló. Ekkor $(L;\leqslant)$ hálószerűen rendezett halmaz, ahol $\leqslant$ a következő részbenrendezés az L halmazon:

$$a\leqslant b \iff a\wedge b=a \quad (\iff a\vee b=b).$$

Definíció

Legyenek $\mathbf{L}_1 = (L_1; \wedge_1, \vee_1)$ és $\mathbf{L}_2 = (L_2; \wedge_2, \vee_2)$ hálók, a hozzájuk tartozó hálószerűen rendezett halmazok legyenek rendre $(L_1; \leqslant_1)$ és $(L_2; \leqslant_2)$, valamint $\varphi\colon L_1 \to L_2$ tetszőleges leképezés. Azt mondjuk, hogy a φ leképezés **rendezéstartó**, ha tetszőleges $a, b \in L_1$-re $a \leqslant_1 b$ esetén $a\varphi \leqslant_2 b\varphi$.

Hálóazonosságok

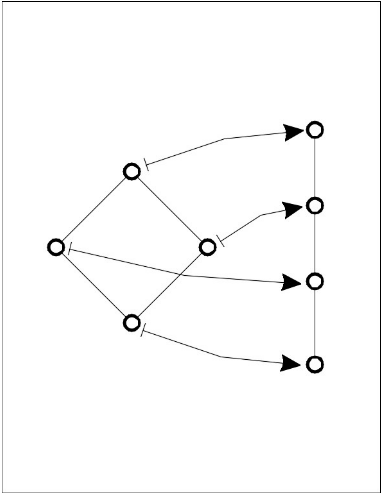
Definíció

Legyenek $\mathbf{L}_1 = (L_1; \wedge_1, \vee_1)$ és $\mathbf{L}_2 = (L_2; \wedge_2, \vee_2)$ hálók, a hozzájuk tartozó hálószerűen rendezett halmazok legyenek rendre $(L_1; \leqslant_1)$ és $(L_2; \leqslant_2)$, valamint $\varphi\colon L_1 \to L_2$ tetszőleges leképezés. Azt mondjuk, hogy a φ leképezés **rendezéstartó**, ha tetszőleges $a, b \in L_1$-re $a \leqslant_1 b$ esetén $a\varphi \leqslant_2 b\varphi$.

Tétel

Legyenek $\mathbf{L}_1 = (L_1; \wedge_1, \vee_1)$ és $\mathbf{L}_2 = (L_2; \wedge_2, \vee_2)$ hálók. Ha a $\varphi\colon L_1 \to L_2$ leképezés homomorfizmus, akkor φ rendezéstartó.

Hálóazonosságok



8. ábra: Nem minden rendezéstartó bijekció izomorfizmus.

Hálóazonosságok

Az előző tétel állítás megfordítása nem igaz, azaz rendezéstartó leképezés nem feltétlenül homomorfizmus. Azonban igaz a következő.

Tétel

Legyenek $\mathbf{L}_1 = (L_1; \wedge_1, \vee_1)$ és $\mathbf{L}_2 = (L_2; \wedge_2, \vee_2)$ hálók, valamint $\varphi\colon L_1 \to L_2$ bijektív leképezés. Ekkor φ pontosan akkor izomorfizmus, ha a φ és φ^{-1} leképezések mindegyike rendezéstartó.

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

(1) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

(1) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

(2) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

(1) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

(2) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

Definíció

Az $\mathbf{L}$ háló **disztributív**, ha a fenti tétel (1) pontja teljesül $\mathbf{L}$-ben.

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges $\mathbf{L} = (L; \wedge, \vee)$ hálóban ekvivalensek a következők:

(1) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

(2) bármely $x, y, z \in L$-re $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

Definíció

Az $\mathbf{L}$ háló **disztributív**, ha a fenti tétel (1) pontja teljesül $\mathbf{L}$-ben.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{L}$ háló **moduláris**, ha bármely $x, y, z \in L$-re $x \leqslant z$ esetén $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$.

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges hálóban igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$
\begin{aligned}
(x \wedge z) \vee (y \wedge z) &\leqslant (x \vee y) \wedge z, \\
(x \wedge y) \vee z &\leqslant (x \vee z) \wedge (y \vee z), \\
x \vee (y \wedge z) &\leqslant (x \vee y) \wedge z.
\end{aligned}
$$

Hálóazonosságok

Állítás

Tetszőleges hálóban igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$
\begin{aligned}
(x \wedge z) \vee (y \wedge z) &\leqslant (x \vee y) \wedge z, \\
(x \wedge y) \vee z &\leqslant (x \vee z) \wedge (y \vee z), \\
x \vee (y \wedge z) &\leqslant (x \vee y) \wedge z.
\end{aligned}
$$

Állítás

(1) Bármely vektortér altérhálója moduláris háló.
(2) Bármely csoport normális részcsoportjainak hálója moduláris háló.

Hálóazonosságok

Tétel [Dedekind, 1900]

Legyen **L** tetszőleges háló. Az **L** háló pontosan akkor moduláris, ha nincs az $\mathbf{N}_5$ hálóval izomorf részhálója.

Hálóazonosságok

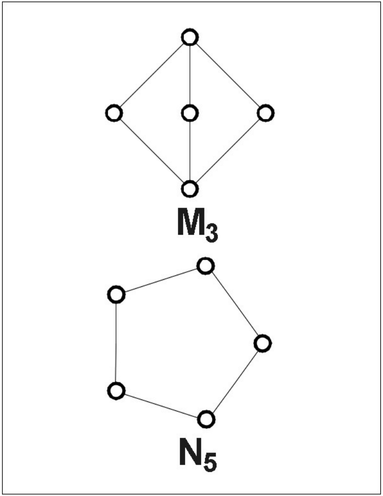
Tétel [Dedekind, 1900]

Legyen $\mathbf{L}$ tetszőleges háló. Az $\mathbf{L}$ háló pontosan akkor moduláris, ha nincs az $\mathbf{N}_5$ hálóval izomorf részhálója.

Tétel [Birkhoff]

Az $\mathbf{L}$ moduláris háló pontosan akkor disztributív, ha nincs a $\mathbf{M}_3$ hálóval izomorf részhálója.

Hálóazonosságok



9. ábra: Az $\mathbf{M}_3$ és $\mathbf{N}_5$ hálók.

Definíció

Az $\mathbf{L}$ hálót **korlátosnak** nevezzük, ha van legkisebb és legnagyobb eleme. Az $\mathbf{L}$ háló legkisebb elemét $0_{\mathbf{L}}$-lel, legnagyobb elemét $1_{\mathbf{L}}$-lel jelöljük. Ha nem okoz félreértést, akkor az indexet is elhagyjuk.

Definíció

Az **L** hálót **korlátosnak** nevezzük, ha van legkisebb és legnagyobb eleme. Az **L** háló legkisebb elemét $0_{\mathbf{L}}$-lel, legnagyobb elemét $1_{\mathbf{L}}$-lel jelöljük. Ha nem okoz félreértést, akkor az indexet is elhagyjuk.

Definíció

Legyen **L** korlátos háló, $a \in L$. A $b \in L$ elemet az a elem **komplementumának** nevezzük, ha $a \wedge b = 0$ és $a \vee b = 1$.

Boole-algebrák

Definíció

Az $\mathbf{L}$ hálót **korlátosnak** nevezzük, ha van legkisebb és legnagyobb eleme. Az $\mathbf{L}$ háló legkisebb elemét $0_{\mathbf{L}}$-lel, legnagyobb elemét $1_{\mathbf{L}}$-lel jelöljük. Ha nem okoz félreértést, akkor az indexet is elhagyjuk.

Definíció

Legyen $\mathbf{L}$ korlátos háló, $a \in L$. A $b \in L$ elemet az a elem **komplementumának** nevezzük, ha $a \wedge b = 0$ és $a \vee b = 1$.

Állítás

Korlátos disztributív háló bármely elemének legfeljebb egy komplementuma van.

Definíció

Azokat a korlátos disztributív hálókat, amelyekben minden elemnek pontosan egy komplementuma van **komplementumos disztributív hálóknak** vagy **Boole-hálóknak** nevezzük.

Boole-algebrák

Definíció

Azokat a korlátos disztributív hálókat, amelyekben minden elemnek pontosan egy komplementuma van **komplementumos disztributív hálóknak** vagy **Boole-hálóknak** nevezzük.

Definíció

A $(B; \wedge, \vee,', 0, 1)$ algebrát ($\wedge$ és $\vee$ kétváltozós, $'$ egyváltozós, 0 és 1 pedig nullaváltozós műveletek) **Boole-algebrának** nevezzük, ha

Definíció

Azokat a korlátos disztributív hálókat, amelyekben minden elemnek pontosan egy komplementuma van **komplementumos disztributív hálóknak** vagy **Boole-hálóknak** nevezzük.

Definíció

A $(B; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ algebrát ($\wedge$ és $\vee$ kétváltozós, $'$ egyváltozós, 0 és 1 pedig nullaváltozós műveletek) **Boole-algebrának** nevezzük, ha

(1) $(B; \wedge, \vee)$ disztributív háló,

Boole-algebrák

Definíció

Azokat a korlátos disztributív hálókat, amelyekben minden elemnek pontosan egy komplementuma van **komplementumos disztributív hálóknak** vagy **Boole-hálóknak** nevezzük.

Definíció

A $(B; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ algebrát ($\wedge$ és $\vee$ kétváltozós, $'$ egyváltozós, 0 és 1 pedig nullaváltozós műveletek) **Boole-algebrának** nevezzük, ha

(1) $(B; \wedge, \vee)$ disztributív háló,

(2) $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$ teljesül bármely $x \in B$-re,

Boole-algebrák

Definíció

Azokat a korlátos disztributív hálókat, amelyekben minden elemnek pontosan egy komplementuma van **komplementumos disztributív hálóknak** vagy **Boole-hálóknak** nevezzük.

Definíció

A $(B; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ algebrát ($\wedge$ és $\vee$ kétváltozós, $'$ egyváltozós, 0 és 1 pedig nullaváltozós műveletek) **Boole-algebrának** nevezzük, ha

(1) $(B; \wedge, \vee)$ disztributív háló,

(2) $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$ teljesül bármely $x \in B$-re,

(3) $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$ teljesül bármely $x \in B$-re.

Állítás

Legyen $(B; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Boole-algebra. Ekkor tetszőleges $a, b, c \in B$ elemekre teljesülnek a következők:

Boole-algebrák

Állítás

Legyen $(B; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Boole-algebra. Ekkor tetszőleges $a, b, c \in B$ elemekre teljesülnek a következők:

(a) ha $a \wedge c = 0$ és $a \vee c = 1$, akkor $c = a'$;

Állítás

Legyen $(B; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Boole-algebra. Ekkor tetszőleges $a, b, c \in B$ elemekre teljesülnek a következők:

(a) ha $a \wedge c = 0$ és $a \vee c = 1$, akkor $c = a'$;

(b) $(a')' = a$;

Állítás

Legyen $(B; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Boole-algebra. Ekkor tetszőleges $a, b, c \in B$ elemekre teljesülnek a következők:

(a) ha $a \wedge c = 0$ és $a \vee c = 1$, akkor $c = a'$;

(b) $(a')' = a$;

(c) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ és $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ (De Morgan-azonosságok).

Boole-algebrák

Állítás

Legyen $(B; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Boole-algebra. Ekkor tetszőleges $a, b, c \in B$ elemekre teljesülnek a következők:

(a) ha $a \wedge c = 0$ és $a \vee c = 1$, akkor $c = a'$;

(b) $(a')' = a$;

(c) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ és $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ (De Morgan-azonosságok).

Példa

Tetszőleges U nemüres halmazra a $(P(U); \cap, \cup, \bar{}, \emptyset, U)$ algebra Boole-algebra.

Boole-algebrák

Tétel [Véges Boole-algebrák reprezentációtétele]

Bármely véges **B** Boole-algebrához létezik olyan A véges halmaz, amelyre

$$\mathbf{B} \cong (P(A); \cap, \cup, \bar{\ }, \emptyset, A).$$

Boole-algebrák

Tétel [Véges Boole-algebrák reprezentációtétele]

Bármely véges **B** Boole-algebrához létezik olyan A véges halmaz, amelyre

$$\mathbf{B} \cong (P(A); \cap, \cup, \bar{\ }, \emptyset, A).$$

Következmény

Minden véges Boole-algebra izomorf a 2-elemű Boole-algebra egy véges direkt hatványával.