Aritmetikai pingpong

Csákány Béla és Dormán Miklós

Egyszerűsítés pingpongban. Amikor a gyerekek a törteket tanulják, mindig elsütik az ősi beugrató kérdést: „Tíz hatod meg tíz hatod az mennyi?" Az áldozat rávágja: „Húsz hatod!", és meglepődik, mert meghúzzák a haját. Az okosabb gyerek, akinek eszébe jut, hogy a húsz hatodot egyszerűsíteni is lehet, így válaszol: „Tíz harmad!" Erre a kérdezőnek marad tátva a szája.

Tegyük fel, hogy erősebb játékossal pingpongozunk, és az ellenfél éppen $9:5$-re vezet. Milyen jó lenne, ha a pingpongban is lehetne egyszerűsíteni! Ha megnyernénk a következő adogatást, $9:6$ helyett $3:2$ lenne a pontarány, ha meg elvesztenénk, akkor $10:5$ helyett $2:1$. Igaz, így sokáig tarthatna a játék, de aki szeret pingpongozni, annak ez csak öröm!

Nevezzük *aritmetikai pingpongnak* azt a játékot, amelynek a szabályai megegyeznek a pingpong szokásos szabályaival azzal a különbséggel, hogy amikor a pontarány, más szóval a játszma állása a szokásos szabályok szerint $m:n$ lenne, akkor ha m és n legnagyobb közös osztója d, és $d>1$, az állás automatikusan $(m/d):(n/d)$-re változik. Ezért az aritmetikai pingpongnak a $0:0$ kezdőállástól különböző lehetséges $m:n$ állásaiban előforduló m és n egészek mindig relatív prímek. A jelenlegi szabályozás szerint a pingpongjátszmában az a játszó fél a győztes, amelyik megnyer 11 labdamenetet, azaz szerez 11 pontot úgy, hogy eközben ellenfele legfeljebb 9 pontot ér el. Ha pedig az állás $11:10$, a játszma folytatódik, és az nyer, aki kettővel több pontot szerez, mint ellenfele. Így bármely olyan $m:n$ $(m>n)$ végállás lehetséges, amelyre $m=11$ és $n<m-1$, vagy $m>11$ és $n=m-2$. Ilyenkor az m számot *nyerő*, az n számot *vesztő pontszámnak* nevezzük. A nyerési szabály második része az aritmetikai pingpongban fölösleges, mert a $11:10$ állás csak $10:10$ után jöhetne létre, ilyen állás azonban nincs. Innen azt is látjuk, hogy a 11 pontig játszott aritmetikai pingpongnak nem minden (m,n), 11-nél nem nagyobb relatív prím egészekből álló számpár lehet állása. (Kisebb számok alkotta példát sem nehéz találni.)

A 21. század kezdetéig érvényes szabályok szerint hosszabbak voltak a pingpongjátszmák: az a fél nyert, amelyik 21 pontot szerzett úgy, hogy ellenfele eközben legfeljebb 19-et. A $21:20$ állás után pedig akkor is az nyert, aki kettővel több pontot ért el, mint ellenfele. Az aritmetikai pingpongot is játszhatjuk 21 pontig. „A matematikus két esetből már általánosít" – mondta Rédei László. Követve ezt a bölcs mondást, tetszőleges $k(>1)$ természetes számra bevezetjük a *k-pingpongot*, amelyben az nyer, aki legalább két pont különbséggel legalább k pontot szerez, és a *k-aritmetikai pingpongot*, amelyben az nyer, aki k pontot szerez. Szándékosan fogtuk ilyen rövidre az utóbbi definíciót, mert a két pontnyi különbséget megkövetelni a $k > 2$ esetben épp úgy fölösleges, mint a már tekintett $k = 11$ esetben (más szóval, a k-aritmetikai pingpongban a nyerő pontszám mindig k), az egyébként is triviális $k = 2$ esetben pedig értelmetlen. A következőkben mindig feltesszük, hogy $k > 2$, és helykímélés végett aritmetikai pingpong helyett *a-pingpongot*, k-aritmetikai pingpong helyett *k-a-pingpongot* írunk, ezek játszmáit pedig *a-játszmának*, illetve *k-a-játszmának* nevezzük. Látni fogjuk, hogy az a-pingpongra vonatkozóan érdekes kérdések tehetők fel, s több ilyen kérdésre nevezetes számelméleti tételek segítségével válaszolhatunk.

Játszmák és állások. A továbbiakban az a-pingpongot olyan, állapotát lépésenként változtató rendszernek tekintjük, amely a következő tulajdonságokkal definiálható:

(a) kezdőállapota az $(0, 0)$ számpár;

(b) további lehetséges állapotai a relatív prím nemnegatív egészekből álló (m, n) számpárok;

(c) állapota minden lépésben két lehetséges módon, mégpedig a

$$H\colon (m, n) \mapsto \left(\frac{m+1}{d}, \frac{n}{d}\right),$$

$(d = \text{ln.k.o.}(m + 1, n))$, és a

$$V\colon (m, n) \mapsto \left(\frac{m}{d'}, \frac{n+1}{d'}\right)$$

$(d' = \text{ln.k.o.}(m, n + 1))$ szabályok (másképpen: egyváltozós műveletek) egyike szerint változik;

(d) végállapota minden, a kezdőállásból véges számú lépéssel elérhető (k, n) állapot, ahol k 2-nél nagyobb rögzített egész szám, és $k > n$.

Az a-pingpongot tehát nem diszkrét matematikai játékként, hanem a dinamikai rendszerekre emlékeztető tulajdonságokkal jellemezzük. Megtartjuk azonban a játékoknál megszokott terminológiát: állapot helyett *állást*, állapotváltozás helyett *lépést*, pálya (vagyis a kezdőállásból végállásba vezető lépéssorozattal előálló állássorozat) helyett *játszmát* mondunk.

Az a-pingpong állásai számpárok; ezért a sík rácspontjaival (derékszögű koordinátarendszer egész koordinátájú pontjaival) ábrázolhatók. Használhatjuk (m, n) helyett a játékoknál szokásos $m : n$ jelölést is. A kezdőállástól különböző lehetséges állások az első síknegyedben lévő olyan (m, n) rácspontok, amelyekre m és n relatív prímek. Megemlítjük, hogy ezeket Erdős és Surányi *látható pontoknak* nevezi ([1], 71–72. o.), mert a koordinátarendszer kezdőpontjában ülő pontszerű megfigyelő csak ezeket látja; a többieket ezek eltakarják. Mi a $(0, 0)$ pontot is a látható pontok közé soroljuk.

Ha a szokásos pingpongban A vezet B ellen, B néhány sikeres labdamenettel átveheti a vezetést. Ez előfordulhat az a-pingpongban is, de csak azon az áron, hogy A és B a játszmát $1 : 1$ állással újrakezdik. Így bármely befejezett a-játszmában az utolsó újrakezdésnél (vagy, ha újrakezdésre a játszma folyamán nem került sor, a játszma elején szükségképpen) fellépő $1 : 1$ állást követően végig ugyanaz a játékos – megállapodhatunk abban, hogy A – vezet. Érthető módon az nem érdekel bennünket, hogy a többször elkezdett játszmáknak az utolsó $1 : 1$ álláshoz vezető szakaszában A és B közül ki, mikor és hogyan vezetett, ezért a továbbiakban mindig feltesszük, hogy a tekintett játszmák állása az első lépés után $1 : 0$, és bennük nem fordul elő újrakezdés. Így elegendő a kezdőállást jelölő $(0, 0)$ rácspont mellett csupán az *első síknyolcadban* levő – tehát az ln.k.o.$(m, n) = 1$ feltétel mellett az $m \geq n$ feltételt is teljesítő – (m, n) rácspontokat vizsgálnunk. (Ezt előre látva adtuk meg az a-pingpong definíciójának (d) pontjában a végállásokat.)

Egy játszmát leírhatunk a játszmában egymás után fellépő állások felsorolásával, vagy a benne egymás után következő lépések jelének felsorolásával. A H és V lépést nevezzük *redukálónak*, ha $d > 1$, ill. $d' > 1$; az ilyen lépés mindkét komponensét csökkenti az állásnak, amelyre alkalmazzuk. A nem-redukáló lépést nevezzük *egyszerűnek*.

Azt a lépéssorozatot, amely a H lépés r-szeri megismétléséből áll, H^r jelöli; hasonlóan értelmezzük a V^r hatványt. Általánosabban, a két lépés vagy lépéssorozat egymás utáni elvégzésével kapott lépéssorozat jele ezek jeleinek a (formális) szorzata. Példa: a $(7, 5)$ állásból a $S = H^8V^4$ lépéssorozat visszavisz a $(7, 5)$ állásba. Ilyen jelöléssel bármely a-játszma felírható. Megállapodunk abban, hogy ezután a redukáló lépésekre utánuk írt függőleges vonallal hívjuk fel a figyelmet, tehát példánkban $S = H^3 \mid H^5V^4$.

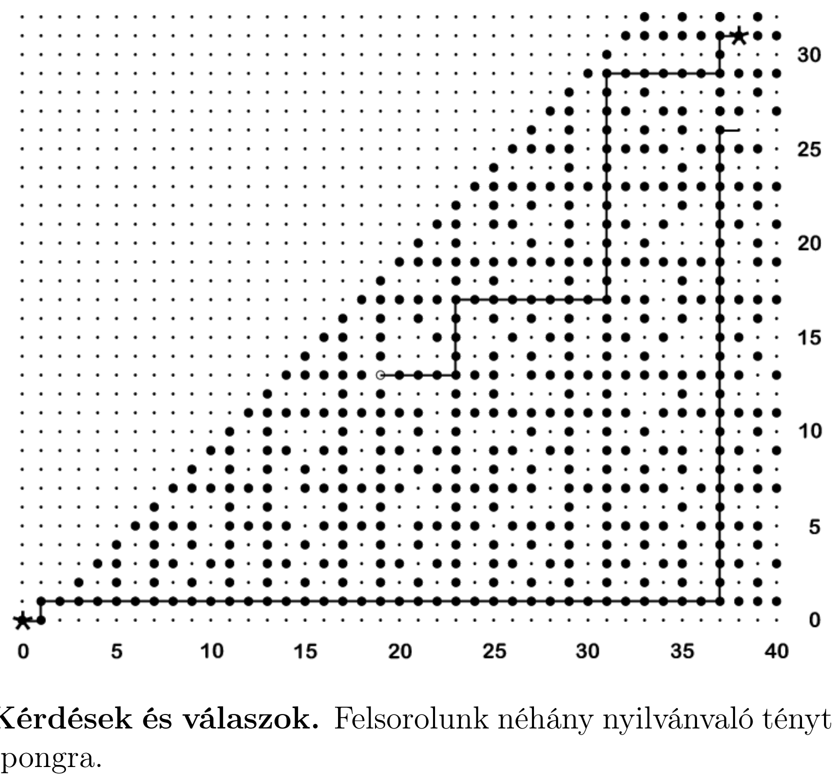
Minden befejezett játszma kezdőlépése is, befejező lépése is H. *Triviálisnak* nevezzük a HVH^{k-1} k-a-játszmát, amelyben tehát A $1 : 1$ után minden labdamenetet megnyer. A 9-a-pingpongban van nemtriviális játszma: $HVH^6V^4H^2$. Másrészt nem túl hosszú végiggondolni, hogy a 11-a-pingpongban csak triviális játszma van. Megmutatjuk, hogy *ha $k > 11$, akkor a k-a-pingpongban mindig van nemtriviális játszma.* Ismeretes Csebisev klasszikus tétele (1850, lásd [1], 129. o., [2], 193. o.), amely szerint bármely 2-nél nagyobb k egész számhoz létezik legalább egy olyan p prímszám, amelyre $k/2 < p < k$. Erre a tételre Ramanujan egyszerűbb bizonyítást adott ([6]), azt is megmutatva, hogy a tétel általánosítható: *bármely n-hez létezik olyan*

k, hogy minden k-nál nagyobb egész szám és a fele közé legalább n számú különböző prímszám esik, és pl. $n = 2$-re $k = 12$. Ha tehát $k > 11$, akkor léteznek olyan p_1, p_2 prímszámok, hogy $k/2 < p_1 < p_2 < k$. Ekkor $HVH^{p_2-1}V^{p_1-1}H^{k-p_2}$ nemtriviális k-a-játszma.

Az a-játszma nem csak újrakezdéskor kerülhet vissza olyan állásba, amelyben már volt; erre példát is láttunk. Nevezzük *egyszerű játszmának* az olyan a-játszmát, amelyben minden állás legfeljebb egyszer fordul elő. Bármely k-a-játszma minden végállása egyszerű k-a-játszmának is végállása. Nevezzük *nagyon egyszerű játszmának* az olyan a-játszmát, amelyben redukáló lépés nem fordul elő. Minden nagyon egyszerű játszma egyúttal egyszerű is. Megmutatjuk, hogy ennek a megfordítása nem igaz: *a 38-a-pingpongban van olyan egyszerű játszma, amelyben előfordul redukáló lépés.* Ilyen lesz a

$$HVH^{36}V^{25}H \mid H^4V^4H^8V^{12}H^6V^2H \tag{1}$$

játszma. Ennek belátásához elegendő szemügyre venni az alábbi ábrát, amelyen kövér pont jelöli az első síknyolcad látható pontjait, vonal mutatja játszmánk menetét, csillag a kezdő- és végállást, üres pont a redukáló lépéssel előálló állást.



Kérdések és válaszok. Felsorolunk néhány nyilvánvaló tényt a szokásos pingpongra.

1. Bármely m és n nemnegatív egészekhez létezik olyan k, hogy $m : n$ a k-pingpongnak állása. 2. Egy $m : n$ végállású k-pingpongjátszmában előforduló

állások száma kisebb, mint $2m$, és ez a korlát pontos: bármely pozitív ϵ-hoz létezik olyan $m:n$ végállású játszma, amelyben $(2-\epsilon)m$-nél több állás fordul elő. 3. Épp úgy, mint a 11-pingpong esetén, $m:n$ $(m>n)$ pontosan akkor végállása a k-pingpongnak, ha $m=k$ és $n<k-1$, vagy $m>k$ és $n=m-2$; ezért az (m,n) $(m>n)$ nemnegatív egész számpárhoz akkor és csak akkor létezik olyan k, hogy $m:n$ a k-pingpongnak végállása, ha $n<m-1$.

Kevésbé nyilvánvaló a válasz az a-pingpongra vonatkozó megfelelő kérdésekre:

1. Mely (m,n) párokhoz van olyan k, hogy $m:n$ állása a k-a-pingpongnak?

Válasz: *Ha $m>n$ és m,n relatív prímek, akkor mindig létezik olyan k, hogy van olyan k-a-pingpongjátszma, melyben az (m,n) állás előfordul.* A bizonyításhoz a számelmélet egy ugyancsak klasszikus eredményét használjuk: Dirichlet tételét (1837, [1], 111. o., [2], 67. o.), amely szerint, *ha egy pozitív egész számokból álló végtelen számtani sorozat kezdőeleme és különbsége relatív prím, akkor a sorozatban van prímszám.* (A tétel konklúzió-részét rendszerint így mondják ki: „... akkor a sorozatban végtelen sok prímszám van.” Gondoljuk meg, hogy ez ekvivalens a tétel általunk adott, szerényebben hangzó alakjával.) Tekintsünk egy (m,n) pozitív egész számpárt, ahol $m>n$ és ln.k.o.$(m,n)=1$. Dirichlet tétele szerint a $2m-1$ kezdőelemű és m különbségű számtani sorozatban van prímszám. Jelöljön p egy ilyen prímszámot, és legyen $p=2m-1+tm$ $(t\geq 0)$. Akkor $p+1=(t+2)m$. Másrészt $(t+2)n<p$. Így az $S=HVH^{p-1}V^{(t+2)n-1}H\mid$ lépéssorozatban az egyetlen redukáló lépés az utolsó lépés, és S az (m,n) álláshoz vezet. Megmutatjuk, hogy S befejezett játszmává folytatható. Azt fogjuk belátni n szerinti indukcióval, hogy ha ln.k.o.$(m,n)=1$ és $m>n$, akkor bármely p-nél nem kisebb k-ra az (m,n) állásból a-pingponglépésekkel el lehet jutni a k-a-pingpong valamely végállásába. Ha $n=1$, akkor H^{k-m} a kívánt lépéssorozat. Ha $n>1$, akkor ugyanebben a lépéssorozatban vagy nincs redukáló lépés, és így az ekkor is a (k,n) végállásba visz, vagy pedig van, mégpedig az $(m+t,n)$ állásból. Ez a lépés egy $((m+t+1)/d,n/d)$ $(d>1)$ állásba vezet, amelyből az indukció-feltevés szerint alkalmas R lépéssorozattal a k-a-játszma egy végállásába jutunk.

Bizonyításunk első fele tömör algebrai nyelvezetet használva azt mutatja, hogy az összes látható pontok halmazán a H és V egyváltozós műveletek által létrehozott algebrai struktúrának a $(0,0)$ pont generátor-eleme. Ez érdekes párja Stern és Brocot tételének (1858-60, [3], 117–119. o.), amely hasonlóan fogalmazva azt mondja ki, hogy a $(0,0)$-tól különböző látható pontok halmazán a medián-művelettel (vagyis az $(a,b)\circ(c,d)\mapsto((a+c)/\text{ln.k.o.}(a+c,b+d),(b+d)/\text{ln.k.o.}(a+c,b+d))$ kétváltozós művelettel) keletkező algebrai struktúrának a $\{(0,1),(1,0)\}$ halmaz generátorrendszere. (Brocot francia órásmester volt, aki pontos órákhoz szükséges fogaskerék-rendszereket tervezve fedezte fel ezt a tényt.)

Könnyű látni, hogy páros m-re az $(m, m-1)$ állásba egyszerű lépésekkel nem juthatunk el, tehát ezek az állások nagyon egyszerű a-játszmákban nem fordulhatnak elő. A $(4,3)$ állásból újrakezdés nélküli a-játszma csak a $HH \mid$ vagy $HVH \mid H \mid$ lépéssorozattal folytatódhat (ellenőrizzük!), amelyek a $(2,1)$ állásba vezetnek, ez az állás azonban minden játszma első lépése után előáll. Innen látjuk, hogy $(4,3)$ egyszerű a-játszmában sem fordulhat elő. Ugyanez hasonlóan igazolható a $(6,5)$ állásra, de a $(8,7)$ álláshoz már találunk – és a következőkben meg is adunk – olyan egyszerű a-játszmát, amelyben előfordul.

2. Legfeljebb hány különböző állás fordulhat elő egy k-a-játszmában?

Tetszőleges k-a-játszmákat tekintve, ha a többször is előforduló állásokat csak egyszer vesszük figyelembe, az előforduló állások száma nyilvánvalóan kisebb, mint a lehetséges állások, vagyis az olyan relatív prím pozitív egészekből álló (m,n) számpárok száma, amelyekre $k \geq m > n$. Ugyanezek a számpárok lépnek fel a k*-adik Farey-sorozatban*, amelynek elemei a növekvő sorozatba rendezett összes, 0 és 1 közötti értékű, k-nál nem nagyobb nevezőjű, egyszerűsíthetetlen n/m racionális törtek; a sorozat kezdőelemének tekintik a 0 számot ([1], 69. o.). (Farey angol geológus volt, aki amatőr matematikusként figyelte meg ezeknek a sorozatoknak egy lényeges tulajdonságát. Azután a 19. század kiemelkedő matematikusai – Cauchy, Sylvester – vizsgálták a Farey-sorozatokat.) Az Euler-féle φ számelméleti függvény értéke minden n helyen az n-nél nem nagyobb, hozzá relatív prím pozitív egészek száma ([1], 206. o., [2], 68. o.) Ezért a k-a-pingpong $(0,0)$-tól különböző lehetséges állásainak száma

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(k). \tag{2}$$

Már Euler tudta, hogy ez az összeg k másodfokú függvényével, mégpedig a

$$\frac{3}{\pi^2}k^2 \tag{3}$$

függvénnyel közelíthető. (Ez kapcsolatban van a következő érdekes összefüggéssel: annak valószínűsége, hogy két találomra kiválasztott pozitív egész relatív prím, éppen a négyzetszámok reciprokaiból álló sor összege, amelyről ismert, hogy értéke $\pi^2/6$.) Innen következik, hogy bármely k-a-pingpong-játszmában kevesebb, mint (3) számú állás fordul elő. (A (k,n) alakú állások közül csak egy; továbbá az egyszerű lépésekkel el nem érhető (u,v) állások közül legfeljebb azok, amelyekre $u \leq k/2$, mert a többiek redukáló lépéssel sem érhetők el.) Ez durva felső becslés; pl. egy 21-a-játszmában legfeljebb 113 állás fordulhat elő, $k = 21$-re (2) a 140, (3) pedig a 134 értéket adja.

Az (1) 38-a-játszmából látjuk, hogy egyszerű k-a-pingpongjátszmában előforduló állások számának nem felső korlátja $2k$: itt az állások száma $100 > 2\cdot 38$. A legkisebb állás, amely egyszerű lépésekkel nem érhető el, de egyszerű játszmában előfordul: $(8, 7)$. Ezt a

$$HVH^{78}V^{69}H \mid H^5V^4H^6V^6H^{12}V^{12}H^{22}V^{18}H^{20}V^{24}H^7 \tag{4}$$

egyszerű 80-a-játszma tartalmazza, amelynek végállása 80 : 71. Az állások száma (4)-ben 287, ami nagyobb, mint $3 \cdot 80$. További a-pingpongjátszmák vizsgálata után felmerül a kérdés: létezik-e olyan c pozitív konstans, hogy bármely k-ra egyetlen egyszerű k-a-játszmában sincs $c\cdot k$-nál több állás. Számítógép segítségével megadtunk olyan egyszerű k-a-játszmát, amelyben az állások száma k-nak több, mint 1481-szerese, tehát, ha a mondott c létezne, nagyobb lenne 1481-nél. Ehhez természetesen igen nagy k szükséges; példánkban $k = 199922$. (Ezek után az is érthető, hogy a szóban forgó játszmát itt nem írjuk fel.) Azt sejtjük, hogy bármely pozitív c-hez van olyan k, hogy létezik olyan k-a-játszma, amelyben az állások száma több, mint $c \cdot k$; másképpen fogalmazva, az állások száma nem becsülhető felülről k lineáris függvényével.

Végül, ha nagyon egyszerű játszmákra szorítkozunk, az előforduló állások számára a szokásos pingpongnál megfigyelthez hasonló pontos felső korlátot adhatunk: *nagyon egyszerű k-a-játszmában csak $2k$-nál kevesebb állás fordulhat elő, de bármilyen kicsi pozitív ϵ-hoz létezik olyan nagyon egyszerű k-a-játszma, amelyben előforduló állások száma több, mint* $(2-\epsilon)k$. Ennek belátásához Ingham következő, szomszédos prímszámok távolságára vonatkozó tételét használjuk ([1], 108. o., [4]):

> *Jelölje p_k a természetes rendezésben k-adik prímszámot. Létezik olyan b pozitív szám, hogy minden n-re $p_{k+1} - p_k < bp_k^{5/8}$.*

Ingham tételéből Mills egyszerűen levezette ([5]), hogy *elegendően nagy szomszédos köbszámok között mindig van prímszám.* (Ezt a tényt Mills segédtételének nevezzük, ő ugyanis annak meglepő ténynek a bizonyítására használta, hogy létezik olyan α valós szám, hogy α minden pozitív egész kitevős hatványának egész része prímszám. Mills segédtétele nem meglepő: már az első két köbszám között 4 prímszámot találunk, a nagyobb szomszédos köbszámok között pedig egyre többet, de véges számú eset megfigyelése nem bizonyítás. Egyébként a szomszédos négyzetszámokra vonatkozó hasonló állítást mindmáig nem sikerült bizonyítani.) Ha ugyanis $n > b^8$ és p_k a legnagyobb olyan prímszám, amely kisebb n^3-nél, akkor

$$n^3 < p_{k+1} < p_k + bp_k^{5/8} < n^3 + bn^{15/8} < n^3 + n^2 < (n+1)^3,$$

tehát a $(k+1)$-edik prímszám n^3 és $(n+1)^3$ között van.

Legyen $0 < \epsilon < 1$, továbbá n olyan pozitív egész, amelyre teljesülnek a következő feltételek: $n-2 > b^8$ és $9/n < \epsilon$. Az első feltétel biztosítja, hogy létezik egy p prímszám $(n-2)^3$ és $(n-1)^3$ között és egy q prímszám $(n-1)^3$ és n^3 között. Akkor $HVH^{q-1}V^{p-1}H^{n^3-q}$ nagyon egyszerű n^3-a-pingpongjátszma, aminek a belátásához csak azt kell igazolnunk, hogy az utolsó $n^3 - q$ számú lépés egyike sem redukáló. Ezekkel a lépésekkel a $(q,p),(q+1,p),\ldots,(n^3,p)$ állások jönnek létre. A második feltételből következik $n \geq 10$. Indukcióval igazolhatjuk az $(n-2)^3 > n^3/2$ egyenlőtlenséget, amelyből következik, hogy állásaink komponensei relatív prímek. Játszmánkban az állások száma $n^3 + p - 1 \geq n^3 + (n-2)^3$, és a második feltételből az is egyszerűen megmutatható, hogy az utóbbi szám nagyobb, mint $(2-\epsilon)n^3$.

3. Mely n-ekre lesz $m : n$ végállása az m-a-pingpongnak?

Ennek a vizsgálatához elegendő csak a nagyon egyszerű játszmákat tekintenünk, mert *bármely k-a-játszma minden (k,l) végállása egy nagyon egyszerű k-a-játszmának is végállása.* Legyen ugyanis p a legnagyobb prímszám, amely kisebb k-nál. Akkor, Csebisev említett tétele szerint $k/2 < p$. Tegyük fel, hogy tekintett játszmánkban van redukáló lépés, és tekintsük az ilyen lépések közül az utolsót. Ha ez az $(m/d, n/d)$ állást hozza létre, ahol $d = \text{ln.k.o.}(m,n)$, akkor $m \leq k$ és $d \geq 2$ miatt $m/d < p$. Ekkor játszmánkban elő fog fordulni olyan (p,q) állás, amely után következő állások mind (p',q') alakúak, ahol $p' > p$, mind nemredukáló lépéssel keletkeznek, és közülük az utolsó: (k,l). Jelölje ezeknek a lépéseknek a sorozatát S. Ekkor a keresett, redukáló lépés nélküli játszma $H^{p-1}V^{q-1}S$.

Világos, hogy $m : 1$ végállás minden m-re, $m : 2$ pedig egyetlen m-re sem végállás; általánosabban, $m : 2k$ egyetlen m-re és egyetlen k-ra sem végállás. *Az $m : 3$ állás akkor és csak akkor végállás, ha m 3-nál nagyobb $6t+2$ alakú egész.* Ha ugyanis $m = 6t + i$, akkor $i \neq 0, 3$, továbbá mivel a megelőző állás csak $(m-1) : 3$ lehet, $i \neq 1, 4$ is igaz. Ha pedig $i = 5$, akkor a megelőző állás $(6t+4) : 3$; ilyen állás azonban egyszerű lépéssel nem állhat elő. Másrészt bármely $(6t+2) : 3$ állást elérhetünk a $HVH^{6t}V^2H$ lépéssorozattal. Hasonló módon, de több munkával igazolható, hogy *az $m : 5$ állás akkor és csak akkor végállás, ha m 5-nél nagyobb és $30t + i$ alakú egész, ahol i a* $2, 3, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 18, 19, 24$ *számok valamelyike.* Ennek végiggondolását – és esetleg az $m : 7$ végállások diszkusszióját – az érdeklődő olvasóra bízzuk. Könnyen belátható, hogy $m : (m-2)$ sem lehet végállás, továbbá $m : (m-3)$

csak akkor lehet végállás, ha m $6t+2$ alakú. Ez a feltétel nem elegendő; a legkisebb ellenpélda $m = 26$.

Az m nyerő pontszámmal befejezett szokásos pingpongjátszmák lehetséges végállásainak száma $m-1$. Mivel páros szám nem lehet vesztő pontszám, az m-a-pingpong végállásainak száma m felét sem érheti el. Azt azonban egyszerűen igazolhatjuk Ramanujan előzőkben is használt tétele segítségével, hogy ha m minden határon túl nő, akkor az m-a-pingpong végállásainak száma is minden határon túl nő. Ha ugyanis k olyan szám, hogy minden nála nagyobb egész és a fele között legalább n prímszám van, akkor, ha $m > k$ és $p_1 < p_2 < \cdots < p_{n-1} < p_n$ az m és $m/2$ közötti prímszámok, az $i = 1, 2, \ldots, n-1$ számok mindegyikére $m : p_i$ végállása lesz a

$$HVH^{p_n-1}V^{p_i-1}H^{m-p_n} \tag{5}$$

a-játszmának, s ezért az m-a-pingpongnak minden k-nál nagyobb m-re legalább n különböző végállása van. Nem nehéz belátni, hogy ha ebben a mondatban k-t mindenütt k', a „fele" szót pedig „harmada" helyettesíti, (5) akkor is szabályos m-a-játszma marad, és a mondat állítása változatlanul igaz lesz. A végállások számára ennek figyelembe vételével adódó alsó becslés még mindig durva, pl. $m = 50$-re $n = 10$-et ad a tényleges 14 helyett.

Hivatkozások

[1] Erdős Pál és Surányi János, *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1960.

[2] Erdős Pál és Surányi János, *Válogatott fejezetek a számelméletből* (második, bővített és módosított kiadás), Polygon, Szeged, 1996.

[3] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O., *Konkrét matematika*, Műszaki Könyvkiadó, 1998.

[4] Ingham, A. E., *On the difference between consecutive primes*, Quarterly Journal of Mathematics, (Oxford) **8** (1937), 255–266.

[5] Mills, W. H., *A prime-representing function*, Bulletin of the American Mathematical Society, **53** (1947), 604.

[6] Ramanujan, S., *A proof of Bertrand's postulate*, Journal of the Indian Mathematical Society, **XI** (1919), 181–182.

Csákány Béla, Bolyai Intézet, Aradi vértanúk tere 1, 6720 Szeged; e-mail: csakany@math.u-szeged.hu

Dormán Miklós, Bolyai Intézet, Aradi vértanúk tere 1, 6720 Szeged; e-mail: dorman@math.u-szeged.hu