Hálókkal a Frankl-sejtésről*

Czédli Gábor, Maróti Miklós, Schmidt E. Tamás

.

Előadás: 2008. október 20-án a Rényi Intézetben

2008. október 19.

*http://www.math.u-szeged.hu/∼czedli/ —holnaptól!

Frankl's conjecture, union-closed sets conjecture

$(\mathcal{F};\cup) \subseteq P(A)$, $\exists b\ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG–MM–SchT $0'/65'$

Frankl Péter (1979): $(\underbrace{\mathcal{F}}_{n\geq 2}, \cup, \emptyset) \leq (P(\underbrace{A}_{m}), \cup, \emptyset))$;

$(\mathcal{F};\cup) \subseteq P(A)$, $\exists b\ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG–MM–SchT 0′/65’

Frankl Péter (1979): $(\underbrace{\mathcal{F}}_{n\geq 2}, \cup, \emptyset) \leq (P(\underbrace{A}_{m}), \cup, \emptyset))$; ekkor (a sejtés szerint) **létezik** olyan $b \in A$, **amely több mint az $\mathcal{F}$-beli halmazok felében benne van**.

$(\mathcal{F};\cup) \subseteq P(A)$, $\exists b\ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG–MM–SchT 0′/65’

Frankl Péter (1979): $(\underbrace{\mathcal{F}}_{n\geq 2}, \cup, \emptyset) \leq (P(\underbrace{A}_{m}), \cup, \emptyset))$; ekkor (a sejtés szerint) **létezik** olyan $b \in A$, **amely több mint az $\mathcal{F}$-beli halmazok felében benne van**. $b \in A$-ra legyen a b elem „súlya” az alábbi:

$$w(b) = |\{X \in \mathcal{F} : b \in X\}| - |\{X \in \mathcal{F} : b \notin X\}|.$$

Frankl Péter (1979): $(\underbrace{\mathcal{F}}_{n\geq 2}, \cup, \emptyset) \leq (P(\underbrace{A}_{m}), \cup, \emptyset))$; ekkor (a sejtés szerint) **létezik** olyan $b \in A$, **amely több mint az $\mathcal{F}$-beli halmazok felében benne van**. $b \in A$-ra legyen a b elem „súlya" az alábbi:

$$w(b) = |\{X \in \mathcal{F} : b \in X\}| - |\{X \in \mathcal{F} : b \notin X\}|.$$

Ekkor a sejtés $\iff$ **létezik $b \in A$, hogy $w(b) \geq 0$.**

Három tucat cikk,

Három tucat cikk, speciális esetek, pl.

$(\mathcal{F};\cup) \subseteq P(A)$, $\exists b\ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$.

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl.

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m$$

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra", azaz amelyekre

$$n \geq 2^m - 12(\frac{3}{2})^{[m/3]} - \frac{1}{2}\binom{m}{3} - \frac{5}{3}m + 44.5\,. \qquad (1)$$

$n \geq$

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m - 12\left(\frac{3}{2}\right)^{[m/3]} - \frac{1}{2}\binom{m}{3} - \frac{5}{3}m + 44.5\,. \tag{1}$$

$$n \geq 2^m - 2^{m/2}, \textbf{ sőt ekkor } \overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0. \quad \text{[CzG 2007]} \tag{2}$$

Itt $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} := \sum_{b\in A} w(b)/|A|$. (

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m - 12\left(\frac{3}{2}\right)^{[m/3]} - \frac{1}{2}\binom{m}{3} - \frac{5}{3}m + 44.5\,. \tag{1}$$

$$n \geq 2^m - 2^{m/2}, \textbf{ sőt ekkor } \overline{\mathrm{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0. \quad \text{[CzG 2007]} \tag{2}$$

Itt $\overline{\mathrm{w}}_{\mathcal{F}} := \sum_{b \in A} w(b)/|A|$. (Ellentétben a Frankl sejtéssel, ez az **átlagolt Frankl-tulajdonság** nem mindig igaz. Viszont hasznos, mert Gao–Yu -t javította.)

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n=|\mathcal{F}|\leq 40$ (Roberts), ha $m=|A|\leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n\geq 2^m-12\left(\frac{3}{2}\right)^{[m/3]}-\frac{1}{2}\binom{m}{3}-\frac{5}{3}m+44.5\,. \tag{1}$$

$$n\geq 2^m-2^{m/2}\text{, **sőt ekkor** } \overline{\mathrm{w}}_{\mathcal{F}}\geq 0. \quad \text{[CzG 2007]} \tag{2}$$

Itt $\overline{\mathrm{w}}_{\mathcal{F}}:=\sum_{b\in A}w(b)/|A|$. (Ellentétben a Frankl sejtéssel, ez az **átlagolt Frankl-tulajdonság** nem mindig igaz. Viszont hasznos, mert Gao–Yu -t javította.) **Meddig javítható (2)?**

M

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m - 12\left(\frac{3}{2}\right)^{[m/3]} - \frac{1}{2}\binom{m}{3} - \frac{5}{3}m + 44.5\,. \tag{1}$$

$$n \geq 2^m - 2^{m/2}, \textbf{ sőt ekkor } \overline{\mathrm{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0. \quad \text{[CzG 2007]} \tag{2}$$

Itt $\overline{\mathrm{w}}_{\mathcal{F}} := \sum_{b \in A} w(b)/|A|$. (Ellentétben a Frankl sejtéssel, ez az **átlagolt Frankl-tulajdonság** nem mindig igaz. Viszont hasznos, mert Gao–Yu -t javította.) **Meddig javítható (2)?**

Megjegyzés: ha valaki megoldja a Frankl-sejtést, a három tucat cikk zöme fölöslegessé válik. Az alábbi eredmény viszont továbbra is érdekes marad!

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$-ig mehetünk.*

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$-ig mehetünk. Legyen $m = |A| \geq 3$.*

(a) Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$-re **nem** *érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.*

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$-ig mehetünk. Legyen $m = |A| \geq 3$.*

(a) Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$-re **nem** *érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.*

(b) Ha az m-elemű alaphalmazokra érvényes a Frankl-sejtés (ez a feltevés szépséghiba. . .),

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$-ig mehetünk. Legyen $m = |A| \geq 3$.*

(a) Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$-re **nem** *érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.*

(b) Ha az m-elemű alaphalmazokra érvényes a Frankl-sejtés (ez a feltevés szépséghiba. . .), akkor

$$n := |\mathcal{F}| \geq 2^m - 2^m/3 \Rightarrow$$

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$-ig mehetünk. Legyen $m = |A| \geq 3$.*

(a) Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$-re **nem** *érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.*

(b) Ha az m-elemű alaphalmazokra érvényes a Frankl-sejtés (ez a feltevés szépséghiba. . .), akkor

$$n := |\mathcal{F}| \geq 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0. \qquad (3)$$

1. Gy

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$-ig mehetünk. Legyen $m = |A| \geq 3$.*

(a) Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$-re **nem** *érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.*

(b) Ha az m-elemű alaphalmazokra érvényes a Frankl-sejtés (ez a feltevés szépséghiba...), akkor

$$n := |\mathcal{F}| \geq 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0. \tag{3}$$

1. Gyengébb sejtés Az $2^{m/2}$ növelhető valami $f(m)$-re úgy, hogy $f(m)/2^{m/2} \to \infty$ akkor is, ha nem tesszük fel a Frankl-sejtést az m-elemű alaphalmazokra. (Tudjuk: $f(m) - 2^{m/2} \to \infty$.)

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n-elemű háló, $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n-elemű háló, $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus {\uparrow}b| - |{\uparrow}b| \geq 0$.

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n-elemű háló, $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus {\uparrow}b| - |{\uparrow}b| \geq 0$. Azaz $|{\uparrow}b| \leq |L \setminus {\uparrow}b|$.

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n-elemű háló, $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus {\uparrow}b| - |{\uparrow}b| \geq 0$. Azaz $|{\uparrow}b| \leq |L \setminus {\uparrow}b|$.

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n-elemű háló, $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus {\uparrow}b| - |{\uparrow}b| \geq 0$.

Azaz $|{\uparrow}b| \leq |L \setminus {\uparrow}b|$. Azaz ${\uparrow}b$ „kicsi".

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n-elemű háló, $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus {\uparrow}b| - |{\uparrow}b| \geq 0$. Azaz $|{\uparrow}b| \leq |L \setminus {\uparrow}b|$. Azaz ${\uparrow}b$ „kicsi".

Itt is lehet átlagolt sejtésről beszélni.

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n-elemű háló, $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus {\uparrow}b| - |{\uparrow}b| \geq 0$. Azaz $|{\uparrow}b| \leq |L \setminus {\uparrow}b|$. Azaz ${\uparrow}b$ „kicsi”.

Itt is lehet átlagolt sejtésről beszélni. n és m ugyanaz az átmenet során!

A h

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n-elemű háló, $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus {\uparrow}b| - |{\uparrow}b| \geq 0$. Azaz $|{\uparrow}b| \leq |L \setminus {\uparrow}b|$. Azaz ${\uparrow}b$ „kicsi”.

Itt is lehet átlagolt sejtésről beszélni. n és m ugyanaz az átmenet során!

A hálós megközelítés előnye: Pl. $(m, n) = (5, 12)$: a háló könnyen áttekinthető, a Venn-diagram kevésbé.

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk!

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza.

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$?

Ármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok”

$b \leq X$

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok" $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva". Ugy

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X-ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok" $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva". Ugyanezen párokat az X-ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok" $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva". Ugyanezen párokat az X-ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2$.

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok" $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva". Ugyanezen párokat az X-ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok" $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva". Ugyanezen párokat az X-ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel $\overline{\mathbf{h}}(B_m) = m/2$, $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2 \Leftrightarrow$

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok" $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva". Ugyanezen párokat az X-ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel $\overline{\mathbf{h}}(B_m) = m/2$, $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2 \Leftrightarrow \overline{\mathbf{h}}(B_m \setminus \mathcal{F}) \leq m/2$. Ez indokolja, hogy $(B_m; \vee, 0)$ valódi részalgebráinak (t.i.

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \ge 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok" $b \le X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva". Ugyanezen párokat az X-ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \ge m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel $\overline{\mathbf{h}}(B_m) = m/2$, $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \ge m/2 \Leftrightarrow \overline{\mathbf{h}}(B_m \setminus \mathcal{F}) \le m/2$. Ez indokolja, hogy $(B_m; \vee, 0)$ valódi részalgebráinak (t.i. az $\mathcal{F}$-eknek) a *komplementereivel* foglalkozzunk; ezekkel könnyebb dolgozni és

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_\mathcal{F} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok" $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva". Ugyanezen párokat az X-ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel $\overline{\mathbf{h}}(B_m) = m/2$, $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2 \Leftrightarrow \overline{\mathbf{h}}(B_m \setminus \mathcal{F}) \leq m/2$. Ez indokolja, hogy $(B_m; \vee, 0)$ valódi részalgebráinak (t.i. az $\mathcal{F}$-eknek) a *komplementereivel* foglalkozzunk; ezekkel könnyebb dolgozni és **szemiideáloknak** fogjuk őket nevezni.

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$-nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m-nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „b-k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X-ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel $\overline{\mathbf{h}}(B_m) = m/2$, $\overline{\mathbf{h}}(\mathcal{F}) \geq m/2 \Leftrightarrow \overline{\mathbf{h}}(B_m \setminus \mathcal{F}) \leq m/2$. Ez indokolja, hogy $(B_m; \vee, 0)$ valódi részalgebráinak (t.i. az $\mathcal{F}$-eknek) a *komplementereivel* foglalkozzunk; ezekkel könnyebb dolgozni és **szemiideáloknak** fogjuk őket nevezni. $\Rightarrow$ Főtétel $\Longleftrightarrow$

2. Tétel. *Legyen* $m \geq 3$, *és legyen* $X \subseteq B_m$ *egy szemiideál. Ha* $|X| \leq 2^m/3$ *és* m*-re érvényes a Frankl-sejtés, akkor* $\overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$.

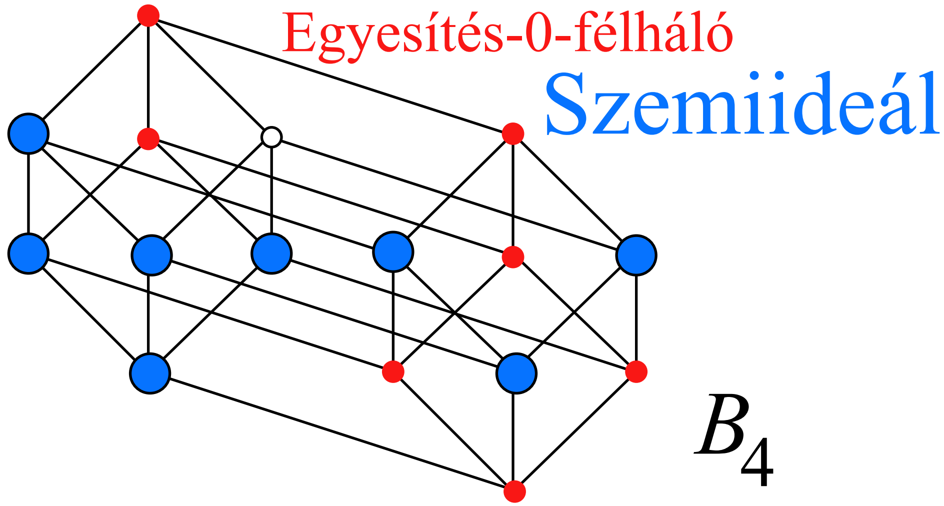
2. Tétel. *Legyen* $m \geq 3$, *és legyen* $X \subseteq B_m$ *egy szemiideál. Ha* $|X| \leq 2^m/3$ *és* m*-re érvényes a Frankl-sejtés, akkor* $\overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$. *Viszont van olyan* X *szemiideál, hogy* $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ *és* $\overline{\mathbf{h}}(X) > m/2$.

2. Tétel. *Legyen* $m \geq 3$, *és legyen* $X \subseteq B_m$ *egy szemiideál. Ha* $|X| \leq 2^m/3$ *és* m*-re érvényes a Frankl-sejtés, akkor* $\overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$*. Viszont van olyan* X *szemiideál, hogy* $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ *és* $\overline{\mathbf{h}}(X) > m/2$*.*

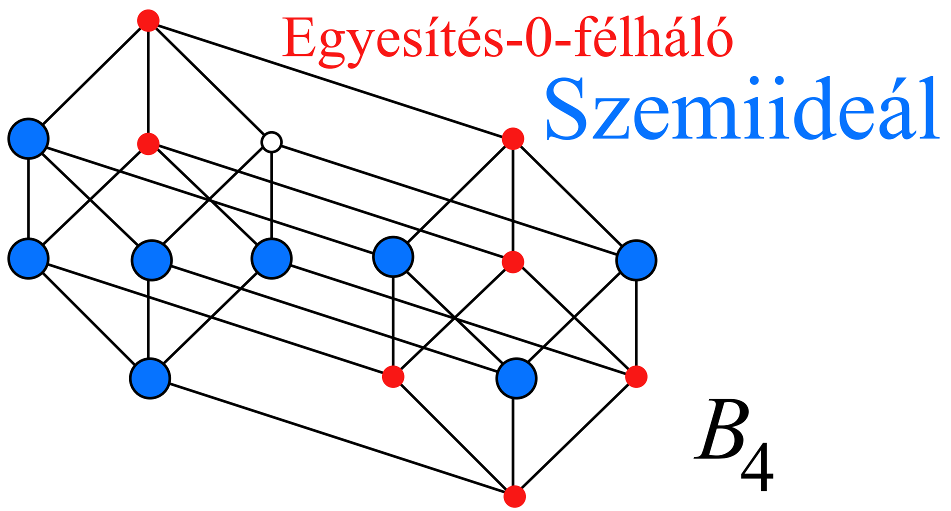
Szükség lesz a szemiideálok konstruktív leírására:

1. Lemma. B_m *szemiideáljai pontosan azok a részhalmazok, amelyek előállnak*

1. Lemma. *B_m szemiideáljai pontosan azok a részhalmazok, amelyek előállnak [atom, egyéb elem] alakú intervallumok uniójaként.*

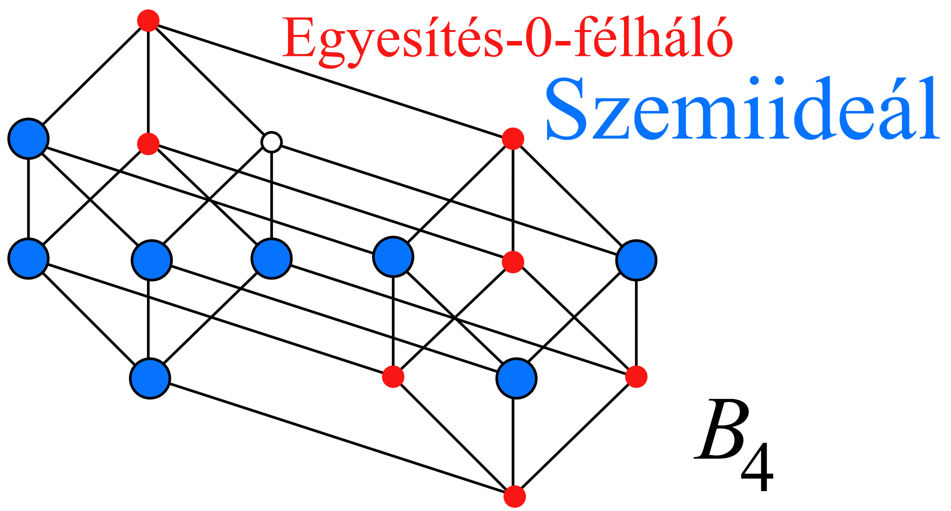


1. Lemma. B_m *szemiideáljai pontosan azok a részhalmazok, amelyek előállnak* [*atom, egyéb elem*] *alakú intervallumok uniójaként.*



Bizonyítás: Egyszerű házi feladat. Megj.:

1. Lemma. *B_m szemiideáljai pontosan azok a részhalmazok, amelyek előállnak [atom, egyéb elem] alakú intervallumok uniójaként.*



Bizonyítás: Egyszerű házi feladat. Megj.: véges disztributív hálóra is igaz, de akkor „atom'' helyett „$\vee$-irreducibilis'' kell.

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$-ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legr

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$-ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabbnak

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$-ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabbnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az, Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$-ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabbnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az, amikor elindulunk egy atomból,

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$-ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabbnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az, amikor elindulunk egy atomból, és egyesével veszünk hozzá elemeket úgy, hogy minden egyes lépésben az elemek magasságainak összege (és ezért az átlaga is) a lehető leggyorsabban nőjön. Az ilyen szemideál neve: **mohó szemiideál**.

Kö

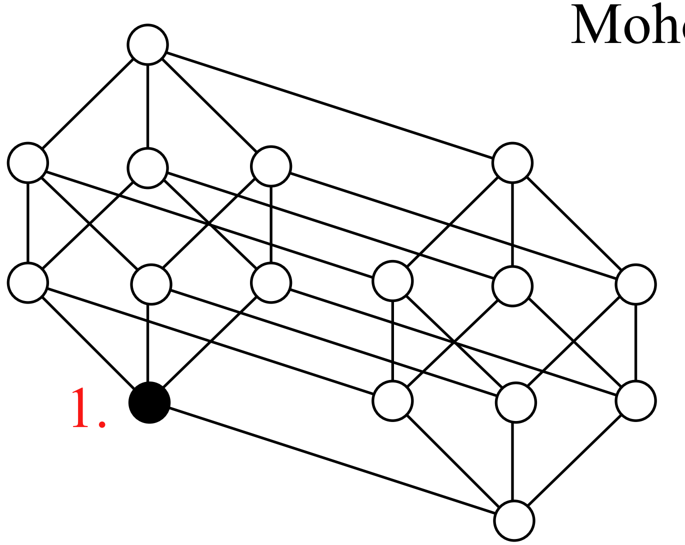
Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$-ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabbnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az, amikor elindulunk egy atomból, és egyesével veszünk hozzá elemeket úgy, hogy minden egyes lépésben az elemek magasságainak összege (és ezért az átlaga is) a lehető leggyorsabban nőjön. Az ilyen szemideál neve: **mohó szemiideál**.

Könnyű belátni, hogy B_m automorfizmusaitól eltekintve az elemszáma meghatározza a mohó szemiideált. Az áb

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$-ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabbnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az, amikor elindulunk egy atomból, és egyesével veszünk hozzá elemeket úgy, hogy minden egyes lépésben az elemek magasságainak összege (és ezért az átlaga is) a lehető leggyorsabban nőjön. Az ilyen szemideál neve: **mohó szemiideál**.

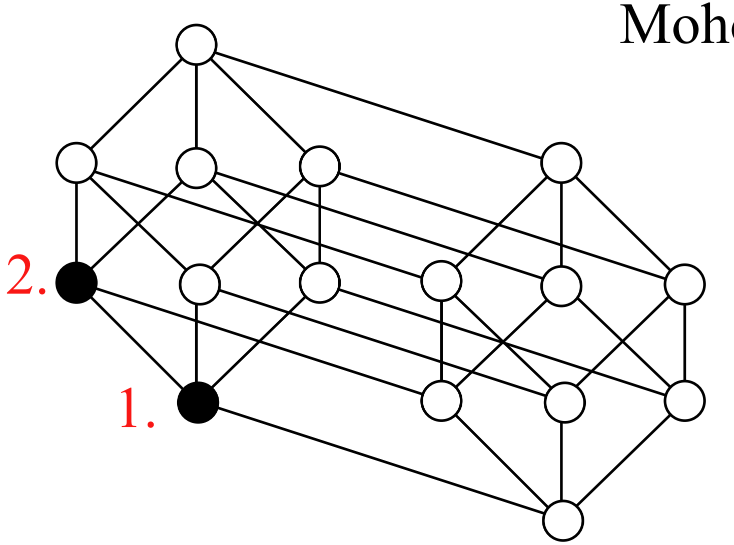
Könnyű belátni, hogy B_m automorfizmusaitól eltekintve az elemszáma meghatározza a mohó szemiideált. Az ábrán $i = 1, 2, \ldots 15$-re $\{a_1, \ldots, a_i\}$ egy i-elemű mohó szemiideálja B_4-nek:

Mohó szemiideál



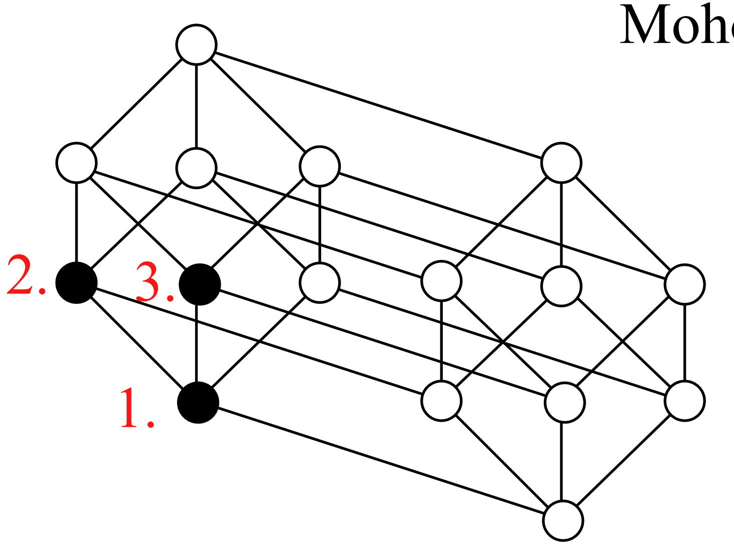
1

Mohó szemiideál



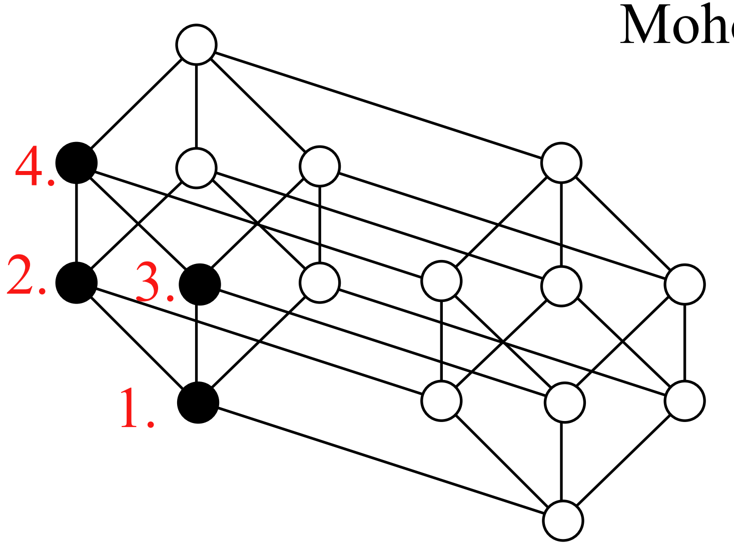
1+2

Mohó szemiideál



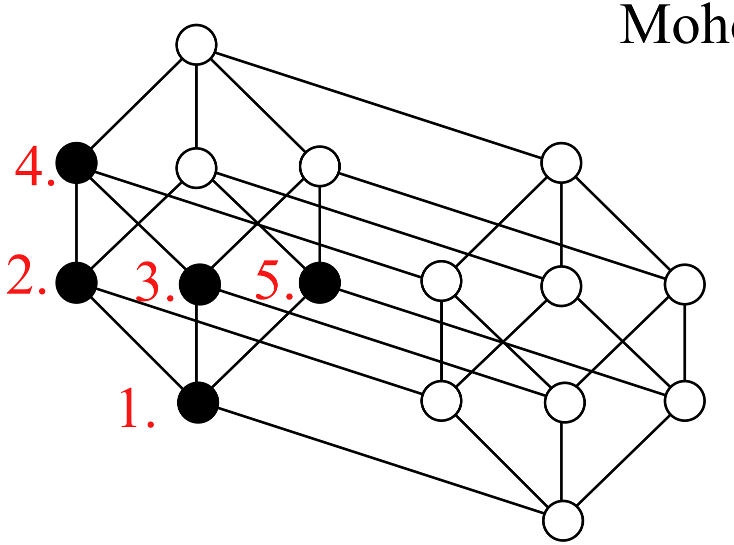
1+2+2

Mohó szemiideál



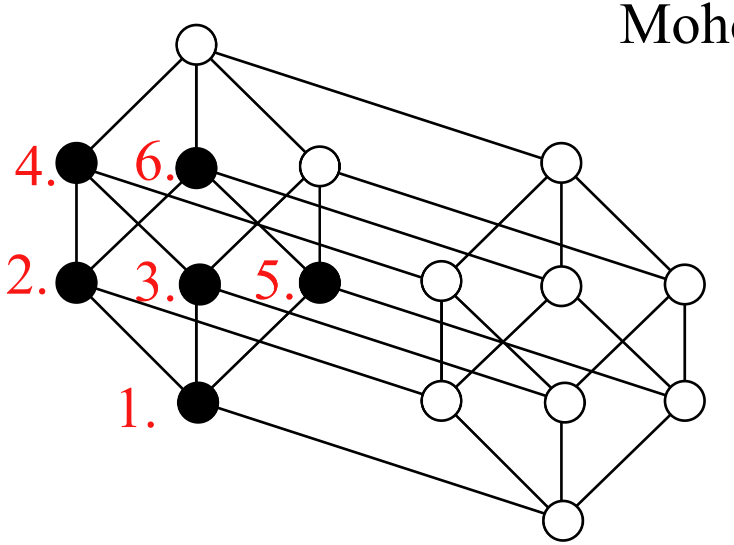
1+2+2+3

Mohó szemiideál



1+2+2+3+2

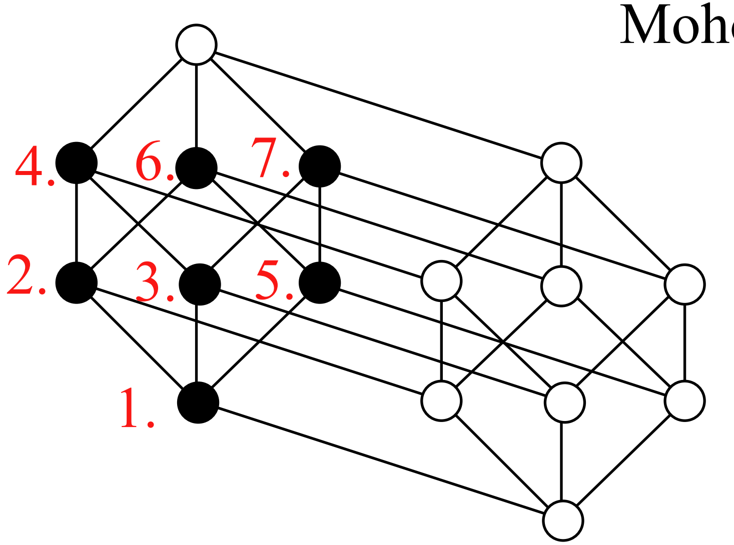
Mohó szemiideál



1+2+2+3+2+3

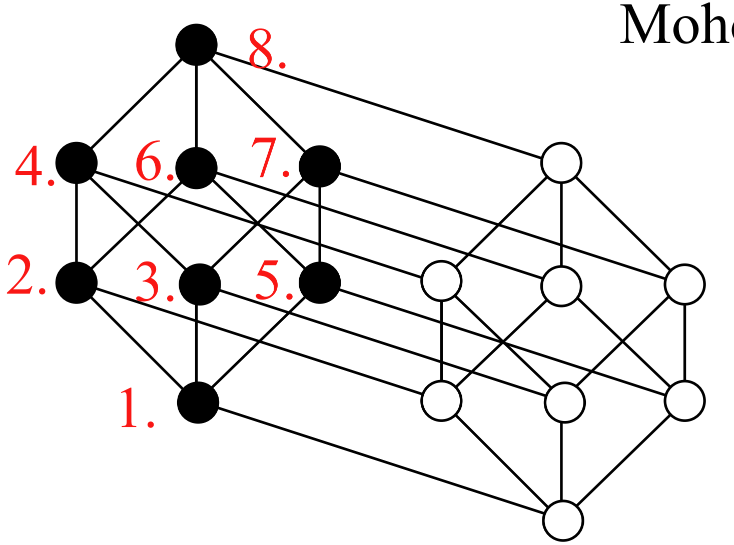
Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 14'/51'

Mohó szemiideál



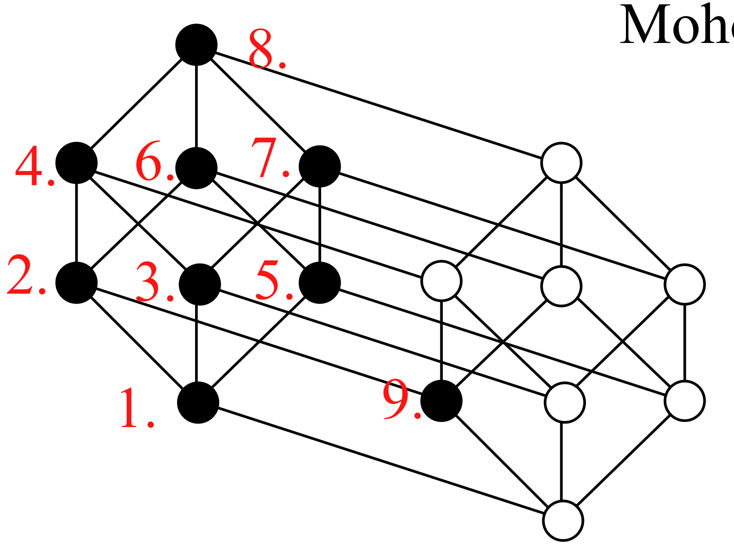
1+2+2+3+2+3+3

Mohó szemiideál



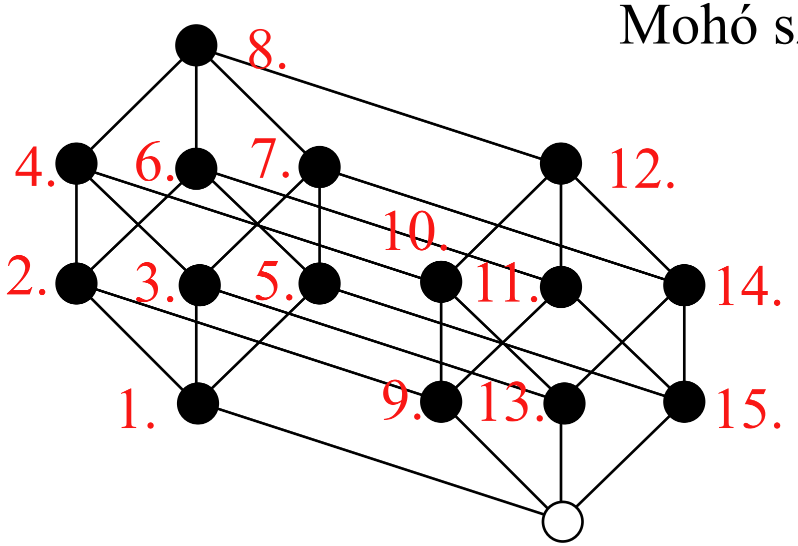
1+2+2+3+2+3+3+4

Mohó szemiideál



1+2+2+3+2+3+3+4+1

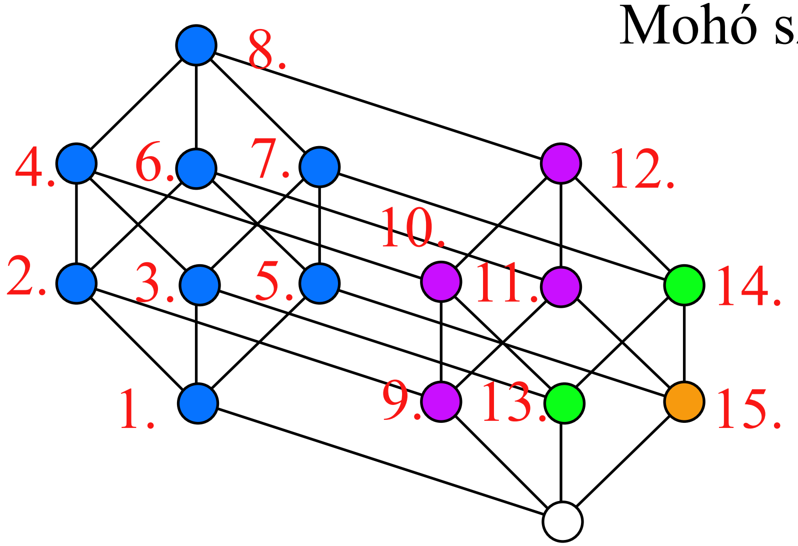
Mohó szemiideál



1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

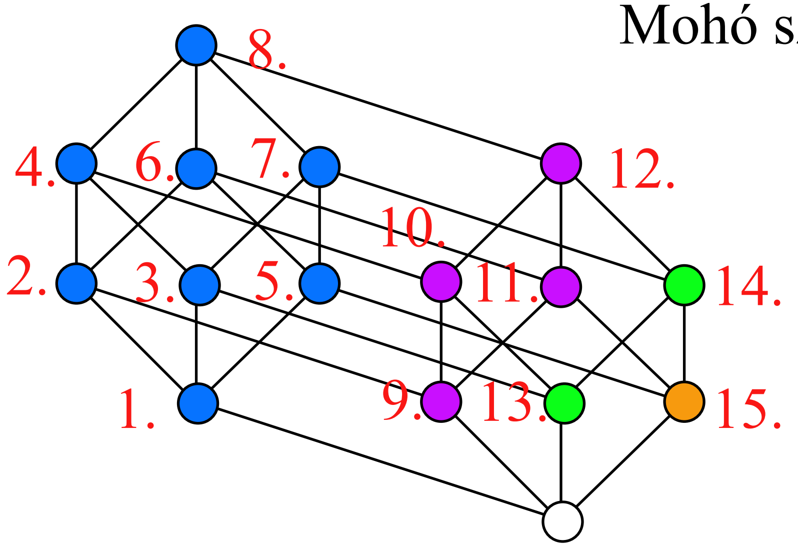
Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 15′/50’

Mohó szemiideál



1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

Mohó szemiideál

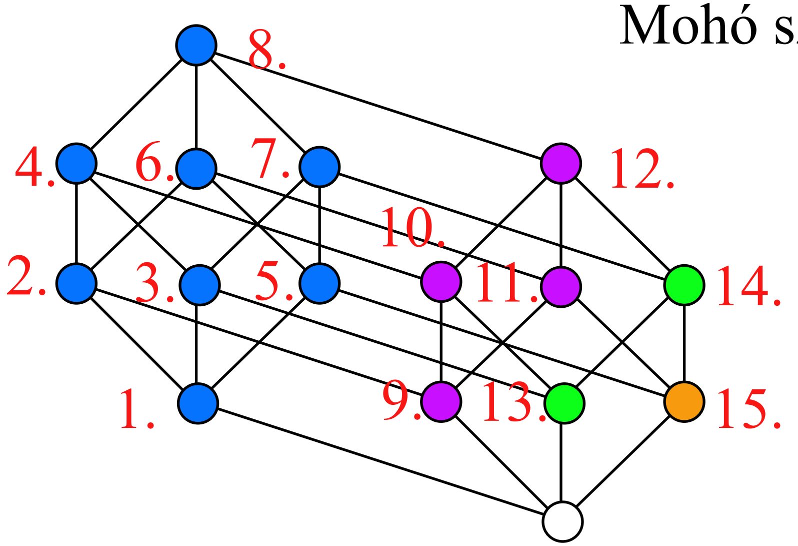


1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

F

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$ CzG–MM–SchT 15′/50'

Mohó szemiideál

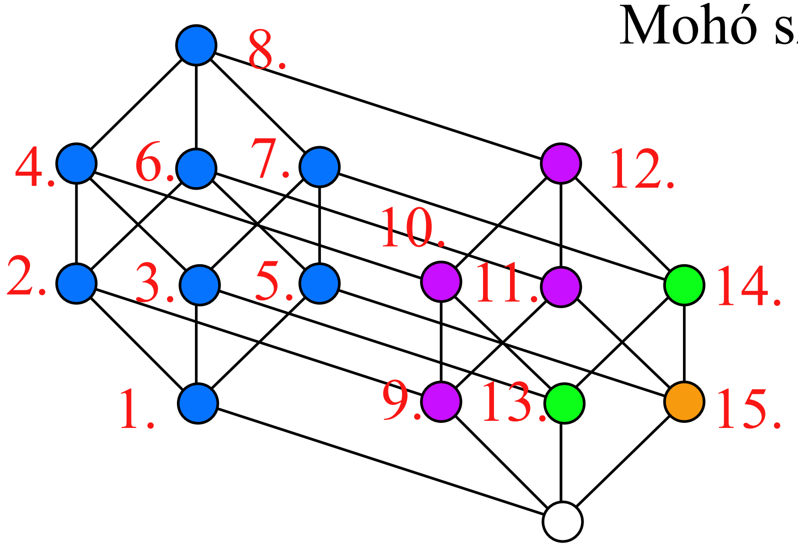


1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

Figyeljük meg, hogy a kék, majd rendre a lila, zöld és narancs **intervallumokban**

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$ CzG–MM–SchT 15$'$/50'

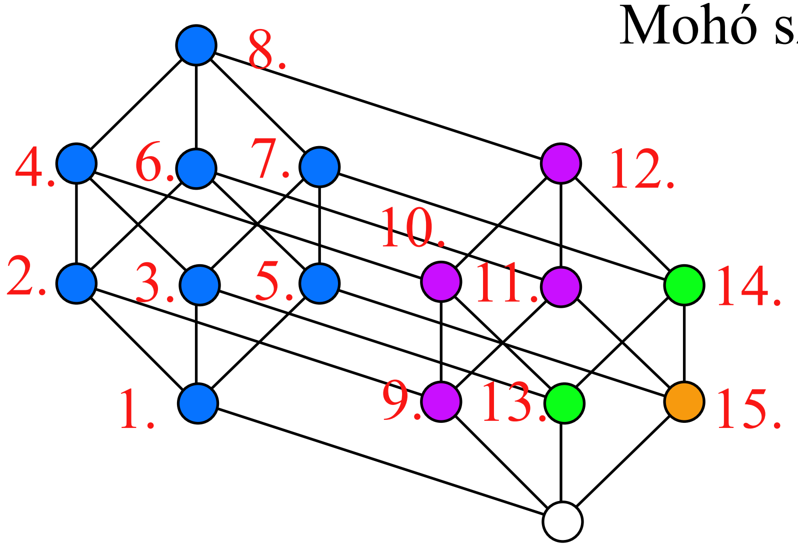
Mohó szemiideál



1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

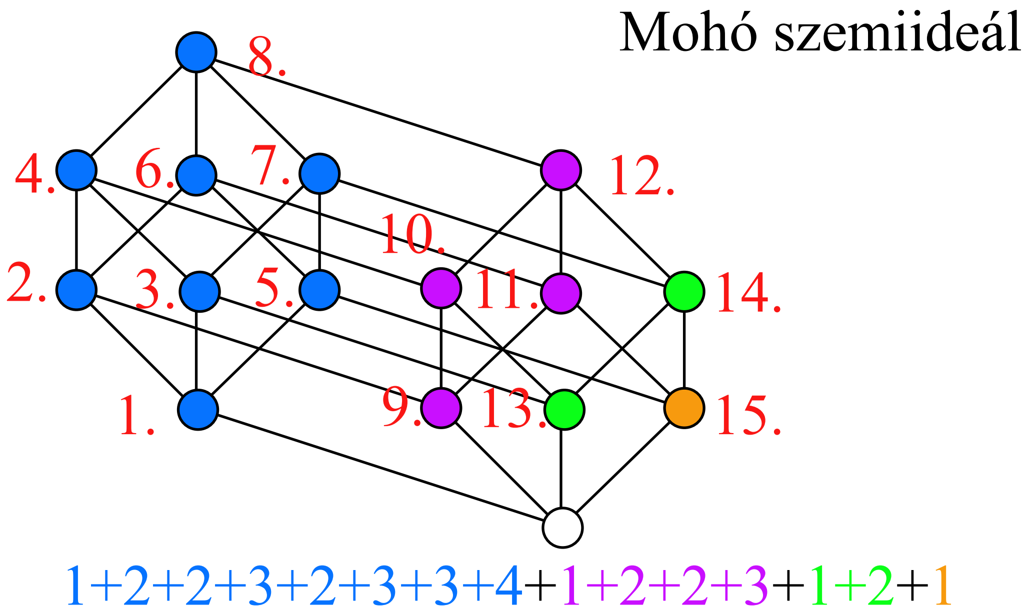
Figyeljük meg, hogy a kék, majd rendre a lila, zöld és narancs **intervallumokban** az történik, hogy

Mohó szemiideál



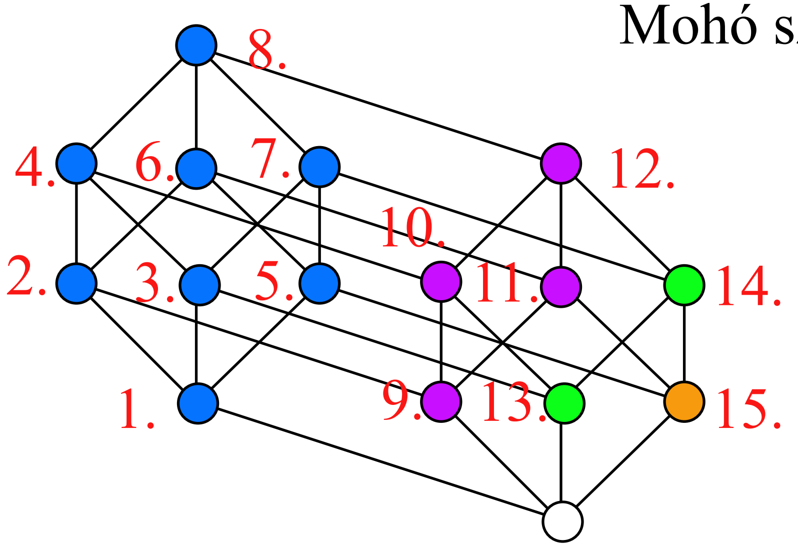
1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

Figyeljük meg, hogy a kék, majd rendre a lila, zöld és narancs **intervallumokban** az történik, hogy egyre nagyobb **mohó rendezésideált** adunk meg! (Ennek definíciója analóg.)



Figyeljük meg, hogy a kék, majd rendre a lila, zöld és narancs **intervallumokban** az történik, hogy egyre nagyobb **mohó rendezésideált** adunk meg! (Ennek definíciója analóg.) Adott elemszám esetén a mohó rendezésideál is automorfizmus erejéig meghatározott.

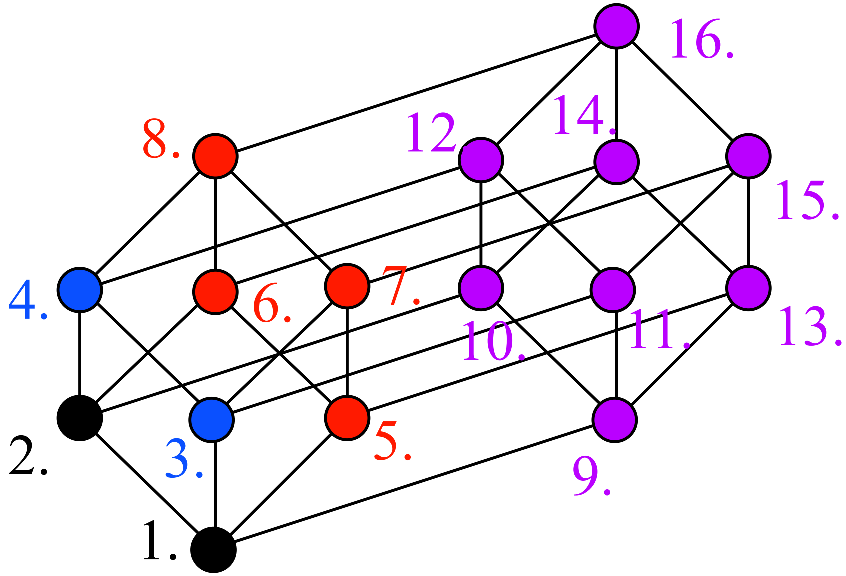
Mohó szemiideál



1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

Legyen $\vec{\beta}^{(m)}$ az a $2^m - 1$ -tagú sorozat, amelynek i-edik tagja a B_m-beli mohó szemiideál „i-edik tagjának" magassága. Például

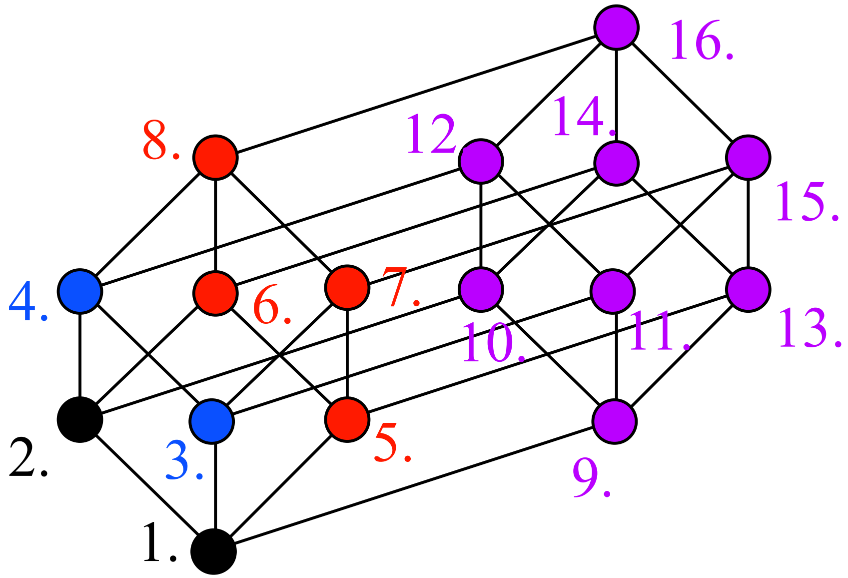
$$\vec{\beta}^{(4)} = (1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 1).$$



Legyen $\vec{\alpha}^{(m)}$ az a 2^m -tagú sorozat, amelynek i-edik tagja a B_m-beli mohó rendezésideál „i-edik tagjának" magassága. Például

$$\vec{\alpha}^{(4)} = (0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4).$$

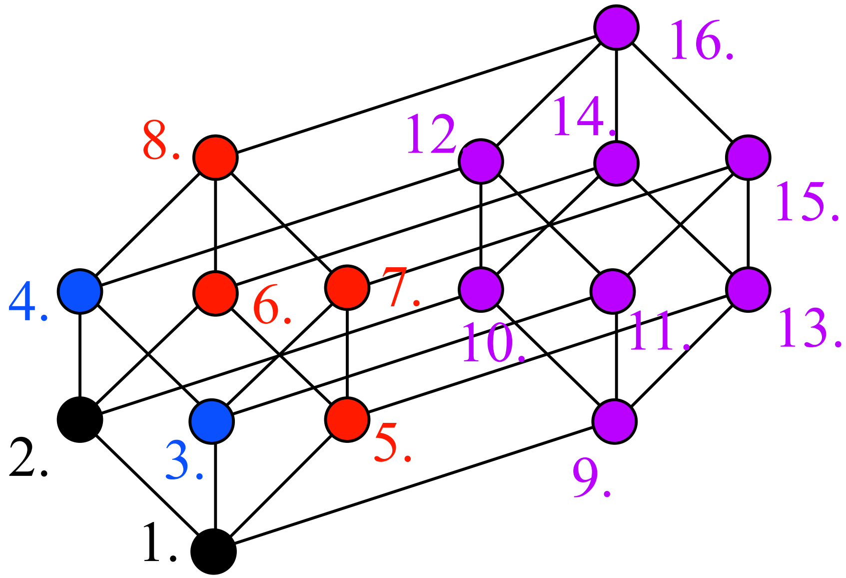
Is



Legyen $\vec{\alpha}^{(m)}$ az a 2^m -tagú sorozat, amelynek i-edik tagja a B_m-beli mohó rendezésideál „i-edik tagjának" magassága. Például

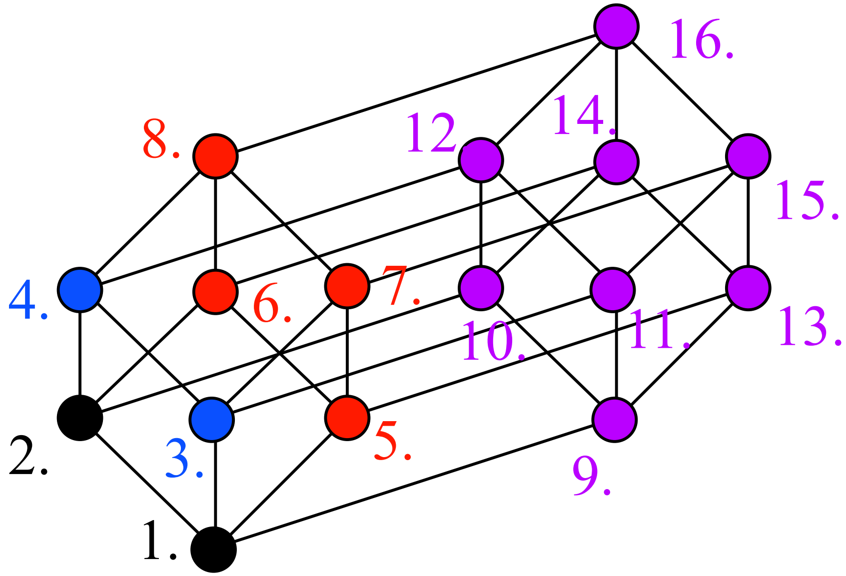
$$\vec{\alpha}^{(4)} = (0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4).$$

Ismerős-e a sorozat?

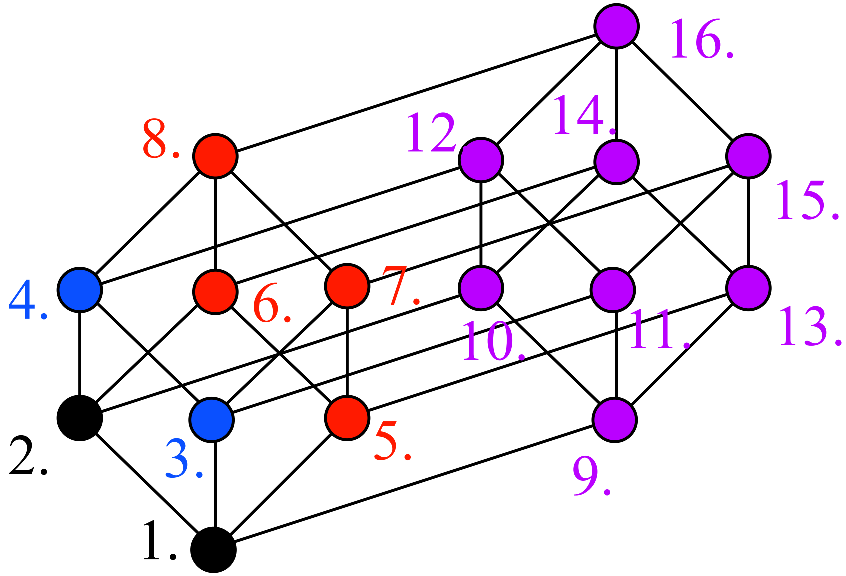


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 . . .

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 19′/46’

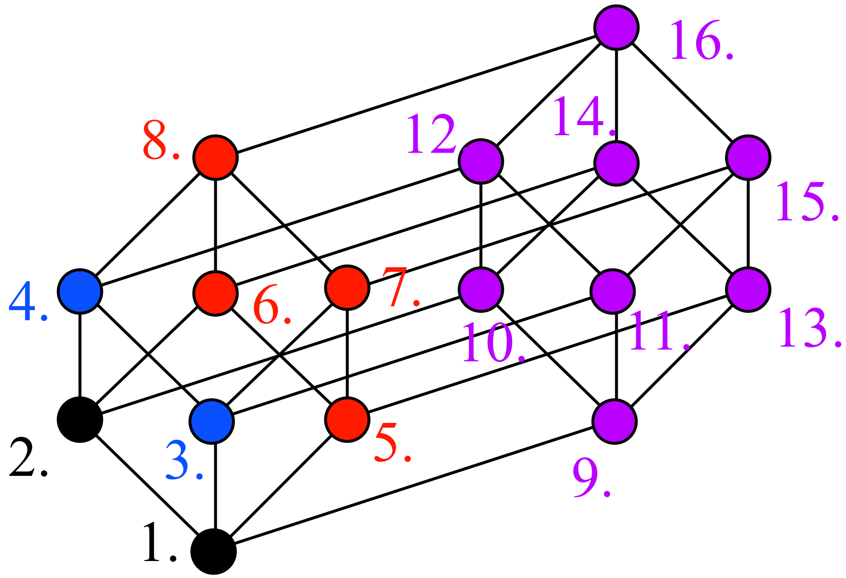


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...
0



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...

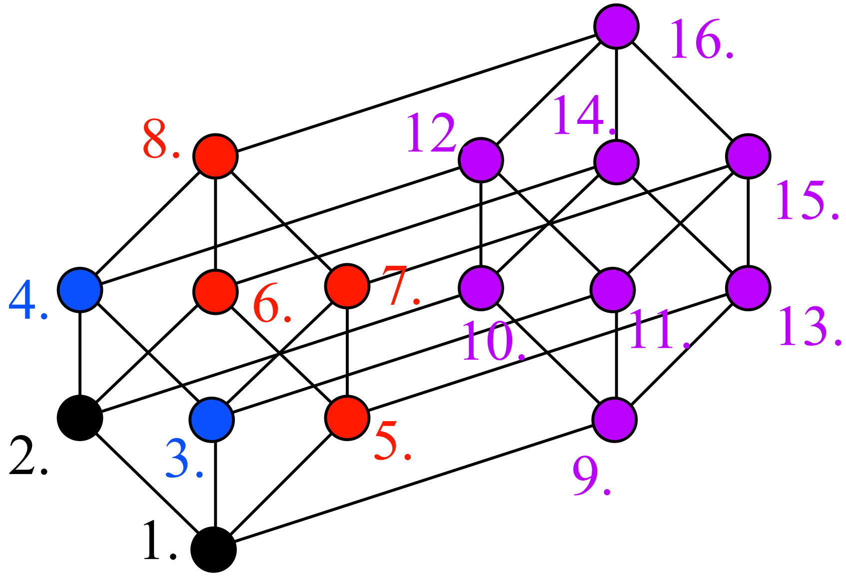
0 1



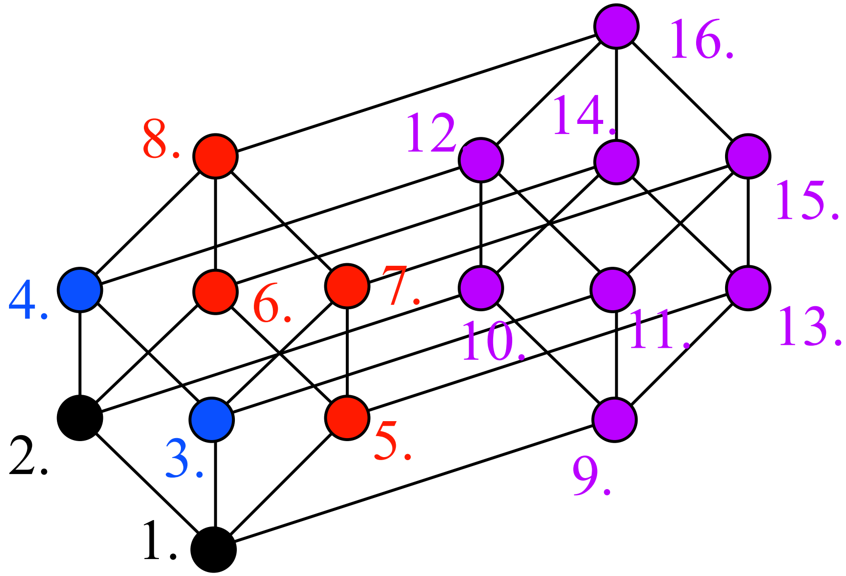
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 . . .

0 1 1 2

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 19′/46′

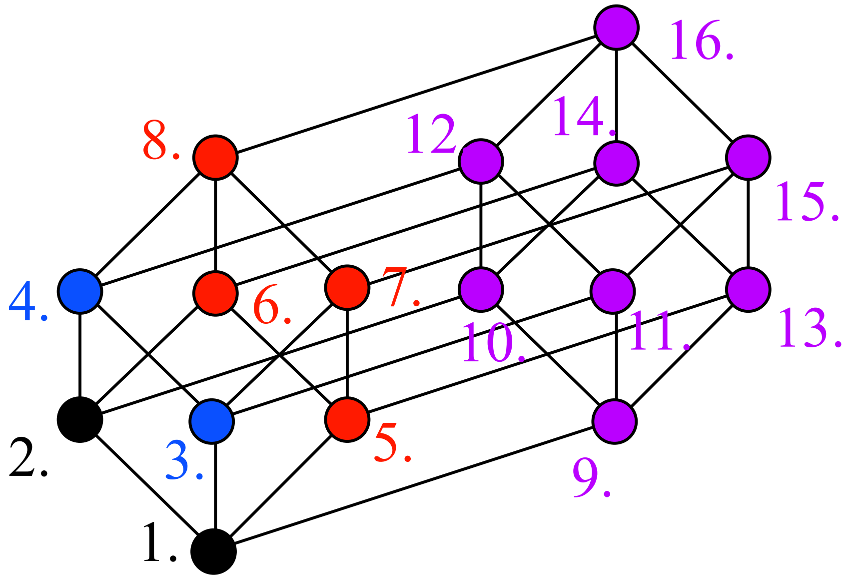


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...
0	1	1	2	1	2	2	3				

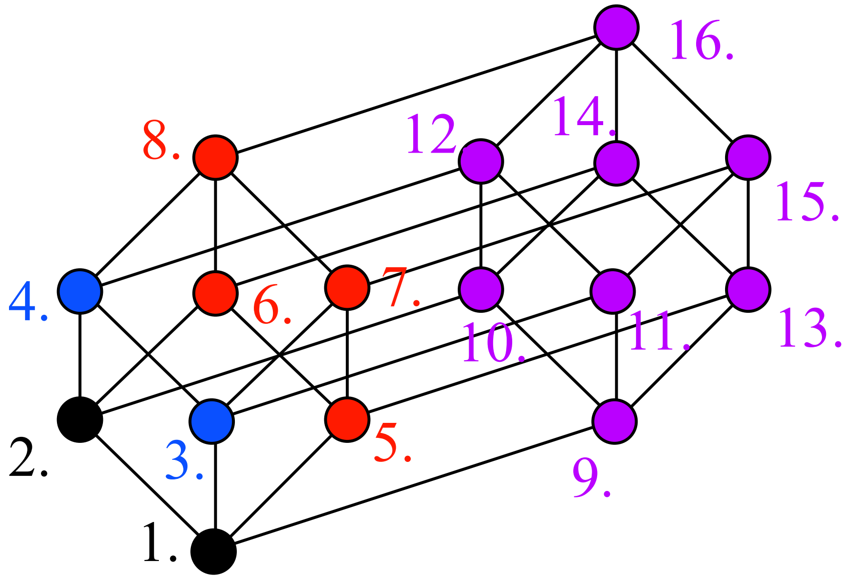


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 . . .
0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3 . . .

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$ CzG–MM–SchT $19'/46'$



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...
0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3 ...



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 . . .
0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3 . . .
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 20′/45'

$\underline{\mathbf{0}}$ 1

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 20′/45'

$\underline{\mathbf{0}}$ 1 $\underline{\mathbf{1}}$ 2

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 20′/45'

$\underline{\mathbf{0}}$ 1 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$ CzG–MM–SchT 20′/45'

$\underline{\mathbf{0}}$ 1 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{3}}$ 4 . . .

Fractal sequence,

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$ CzG–MM–SchT 20′/45'

$\underline{\mathbf{0}}$ 1 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{3}}$ 4...

Fractal sequence, 0–1 counting sequence,

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 20′/45’

$\underline{\mathbf{0}}$ 1 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{3}}$ 4 . . .

Fractal sequence, 0–1 counting sequence, digit sum sequence.

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$ CzG–MM–SchT 20′/45'

$\underline{\mathbf{0}}$ 1 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{3}}$ 4...

Fractal sequence, 0–1 counting sequence, digit sum sequence.

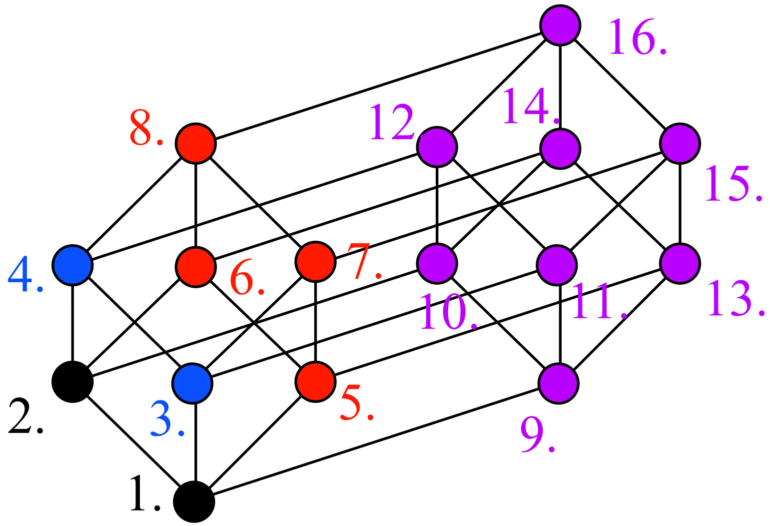
Megjegyzés: számjegyösszeg sorozatokra, sőt annál általánosabb sorozatokra, láncok direkt szorzatára, sőt különböző hosszúságú láncok direkt szorzatára is . . .

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT $20'/45'$

$\underline{\mathbf{0}}$ 1 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{1}}$ 2 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{2}}$ 3 $\underline{\mathbf{3}}$ 4...

Fractal sequence, 0–1 counting sequence, digit sum sequence.

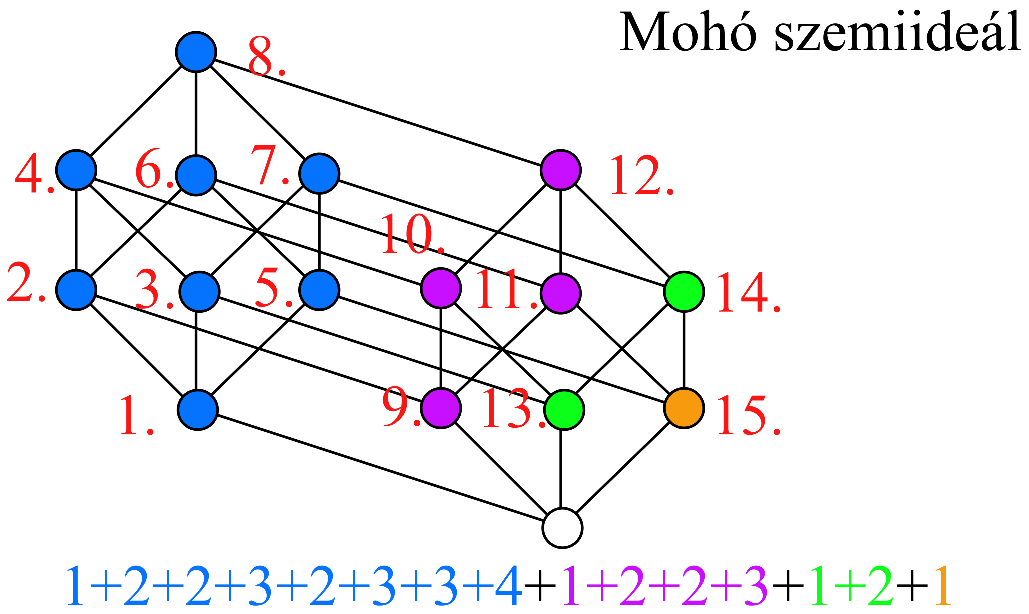
Megjegyzés: számjegyösszeg sorozatokra, sőt annál általánosabb sorozatokra, láncok direkt szorzatára, sőt különböző hosszúságú láncok direkt szorzatára is ...



Rekurzió: $\vec{\alpha}^{(4)} = (\underbrace{0,1,1,2,1,2,2,3}_{\vec{\alpha}^{(3)}}, \underbrace{1,2,2,3,2,3,3,4}_{\bar{1}+\vec{\alpha}^{(3)}})$.

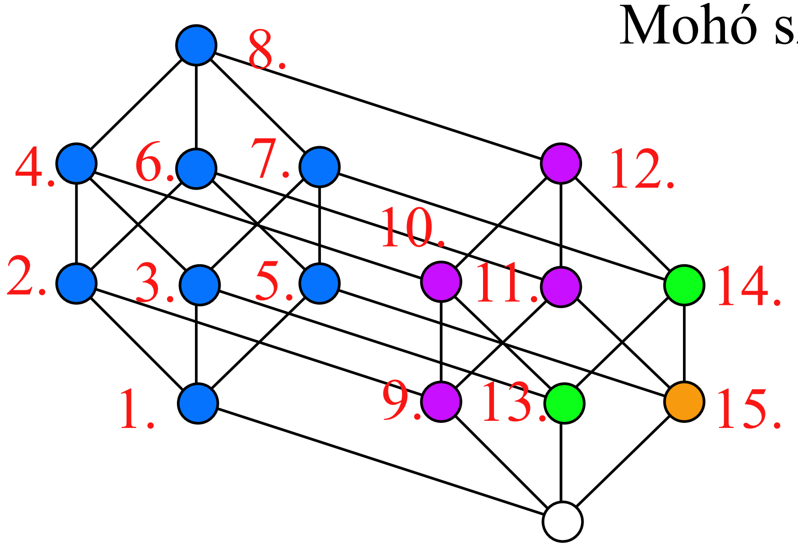
Legyen $\vec{\gamma}^{(m)}$ az $\vec{\alpha}^{(m)}$-nél egyel nagyobb tagokból álló sorozat, pl.

$$\vec{\gamma}^{(4)} = (1,2,2,3,2,3,3,4,2,3,3,4,3,4,4,5).$$



Azért érdemes az $\vec{\alpha}^{(m)}$ sorozatot „eggyel feltolva” a $\vec{\gamma}^{(m)}$ sorozatot is tekintenünk, mert a mohó szemiideálban a mohó rendezésideálok „eggyel feltolva” vannak jelen. Az ábra szerint érvényes:

Mohó szemiideál



1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

$$\vec{\beta}^{(4)} = (\underbrace{1,2,2,3,2,3,3,4}_{\vec{\gamma}^{(3)}}, \underbrace{\underbrace{1,2,2,3}_{\vec{\gamma}^{(2)}}, \underbrace{1,2}_{\vec{\gamma}^{(1)}}, \underbrace{1}_{\vec{\gamma}^{(0)}}}_{\vec{\beta}^{(3)}}).$$

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT $25'/40'$

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$ CzG–MM–SchT 25′/40’

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 25′/40'

Eddigi rekurzív összefüggések ⇒ később szükséges tulajdonságok (≈ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 25$'$/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok (≈ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

M

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$ CzG–MM–SchT 25$'$/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok ($\approx$ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Mi

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 25$'$/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok ($\approx$ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Mik

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 25$'$/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok (≈ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Mikl

Fr$_m$, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG–MM–SchT 25$'$/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok ($\approx$ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Mikló

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok (≈ 4 oldal)

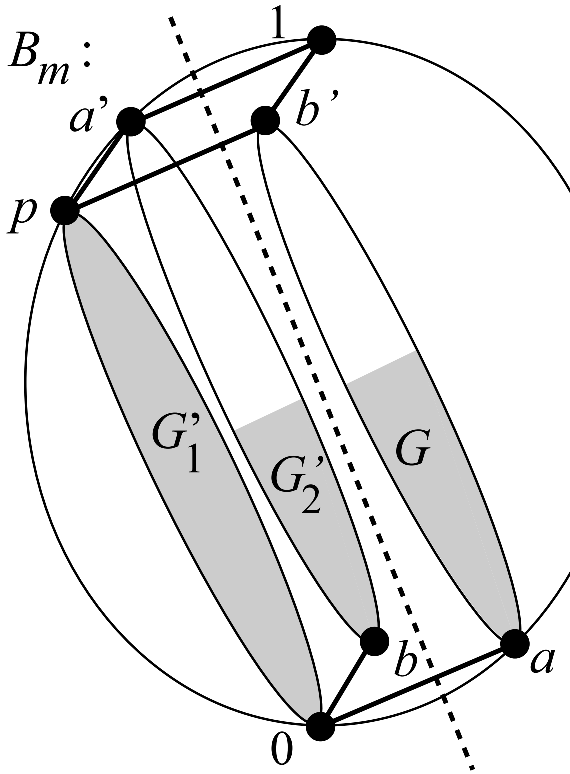
Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Miklós

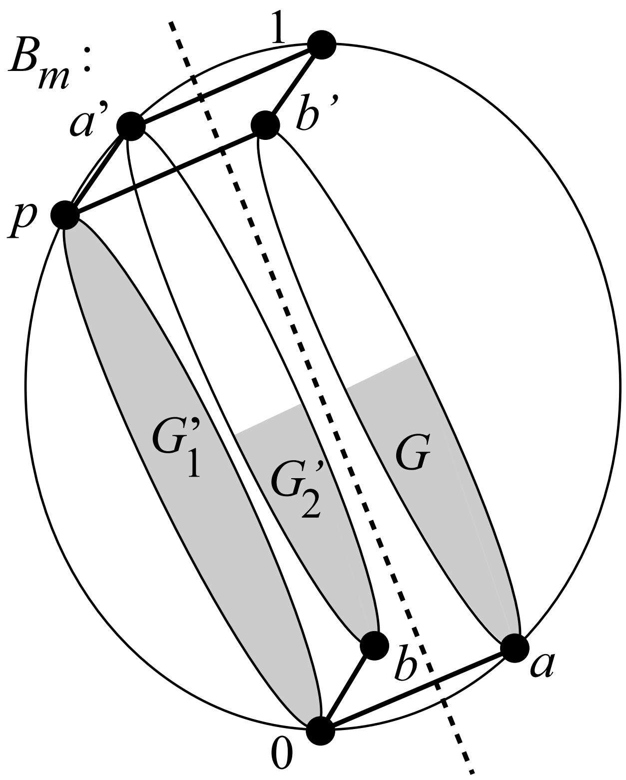
2. Lemma. *A mohó rendezésideálok a lehető legmagasabbak!*

2. Lemma. *A mohó rendezésideálok a lehető legmagasabbak! Azaz ha* $X, Y \subseteq B_m$ *rendezésideálok és* Y *mohó, akkor* $\overline{\mathbf{h}}(X) \leq \overline{\mathbf{h}}(Y)$*.*

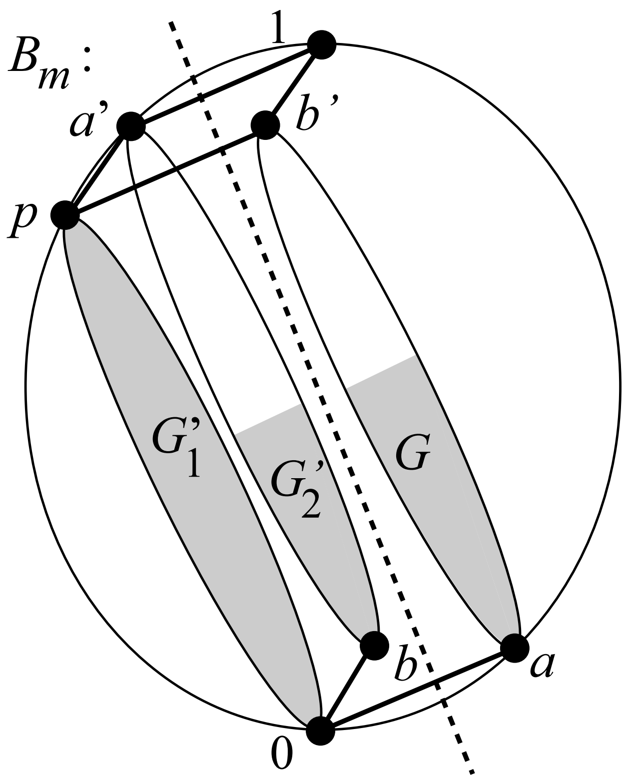
Bizonyítás Legyen X rendezésideál. Az a feladat, hogy X elemszámát fixen tartva, átlagmagasságát nem csökkentve addig módosítsuk, amíg mohóhoz érkezünk.



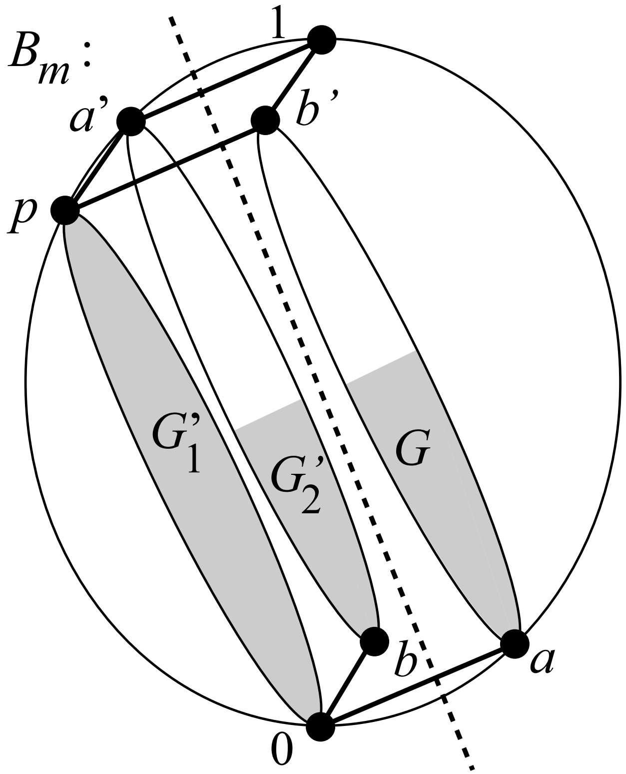
Legyen



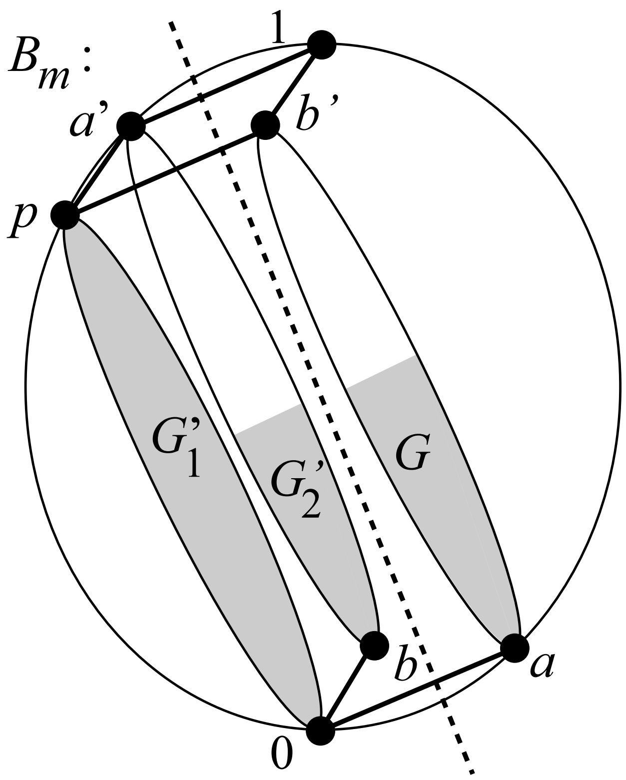
Legyen $a \in B_m$ atom, a' az a komplementere. Ekkor B_m az $\downarrow a'$ és $\uparrow a$ diszjunkt uniója. (Ld.



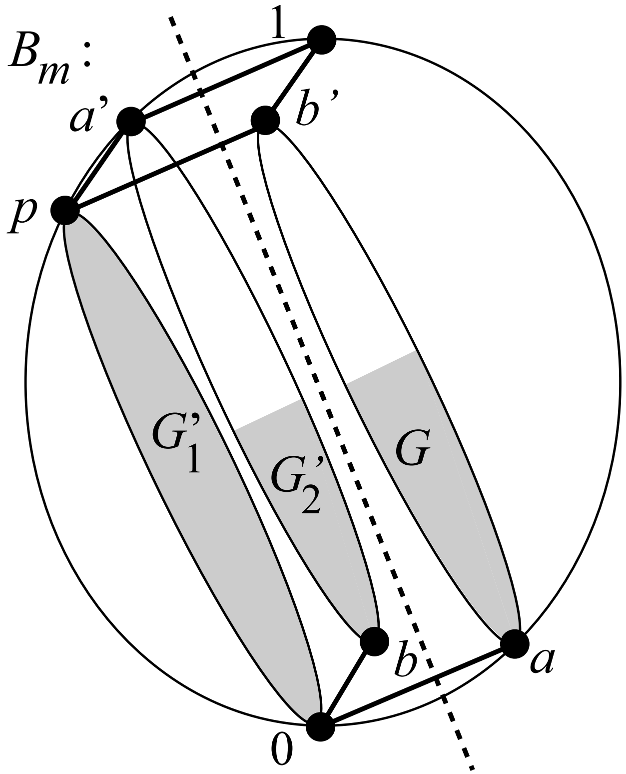
Legyen $a \in B_m$ atom, a' az a komplementere. Ekkor B_m az $\downarrow a'$ és $\uparrow a$ diszjunkt uniója. (Ld. szaggatott vonal.) Legyen $G := \uparrow a \cap X$ és $G' := \downarrow a' \cap X$.



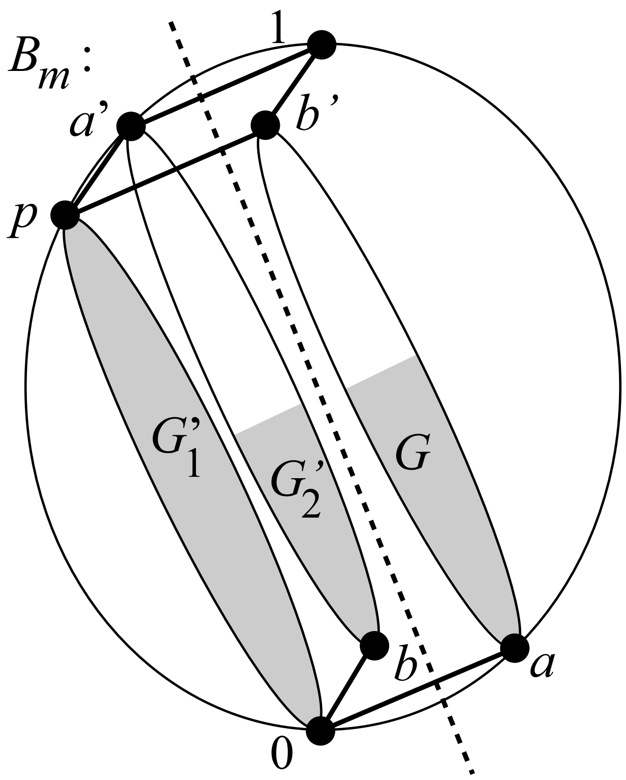
Több eset van, ezek egyike, amikor $2^m/4 < |G'|$. Az ábrán $p \prec a'$, $G' = G'_1 \cup G'_2$. Ha $G =$



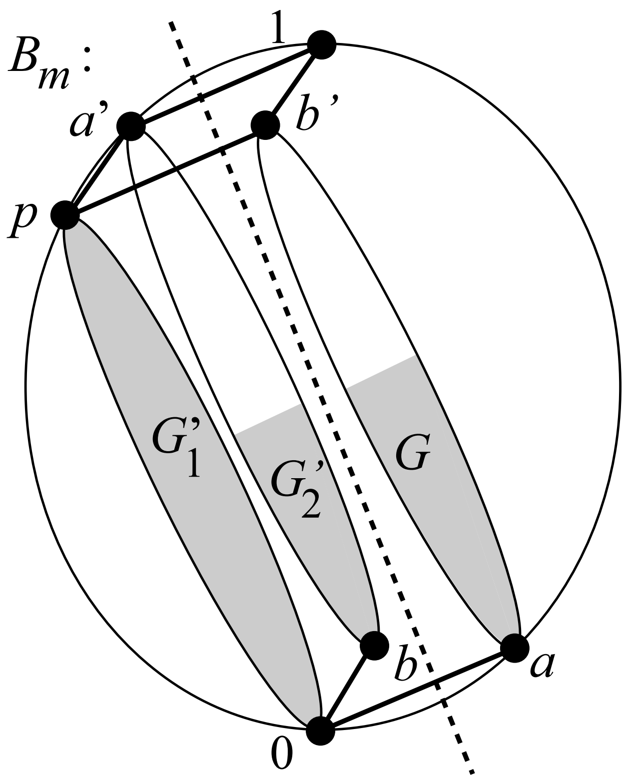
Több eset van, ezek egyike, amikor $2^m/4 < |G'|$. Az ábrán $p \prec a'$, $G' = G_1' \cup G_2'$. Ha $G = \emptyset$, akkor $\downarrow a'$-re az indukciós hipotézis alkalmazható. Természetesen



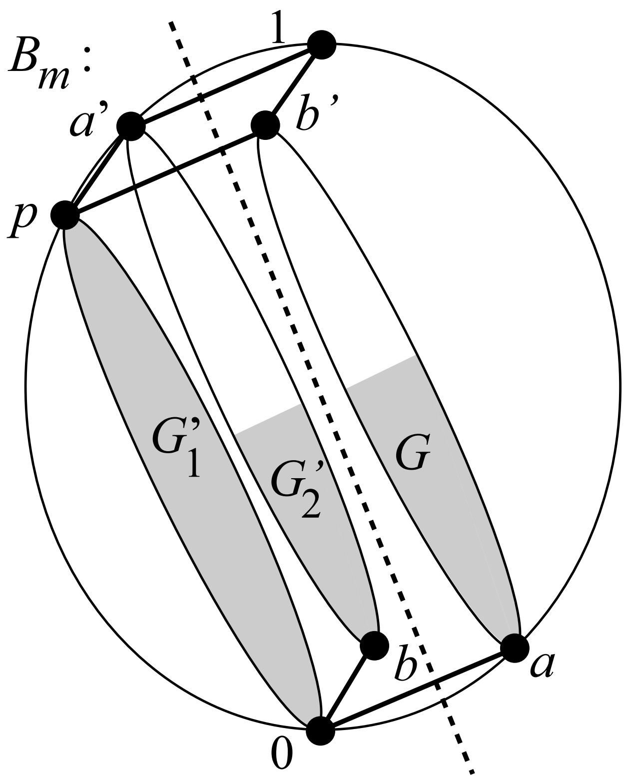
Több eset van, ezek egyike, amikor $2^m/4 < |G'|$. Az ábrán $p \prec a'$, $G' = G_1' \cup G_2'$. Ha $G = \emptyset$, akkor $\downarrow a'$-re az indukciós hipotézis alkalmazható. Természetesen az ind.hip. miatt feltehető, hogy G mohó $\uparrow a$-ban, G' pedig $\downarrow a'$-ben.



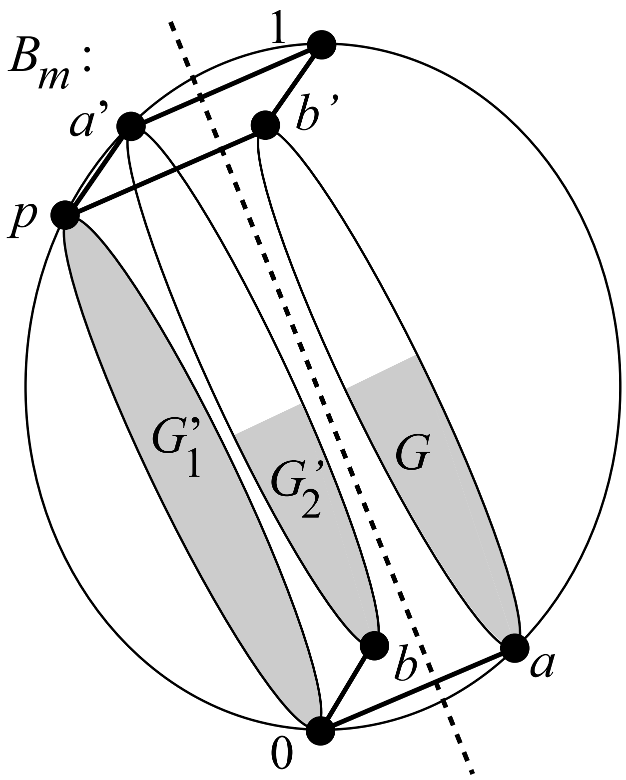
A G elemeiből rakjunk át annyi elemet (akár az összeset) a $[b, a']$ intervallumba, amennyit csak lehet (akár teljesen feltöltve a $[b, a']$ intervallumot.)



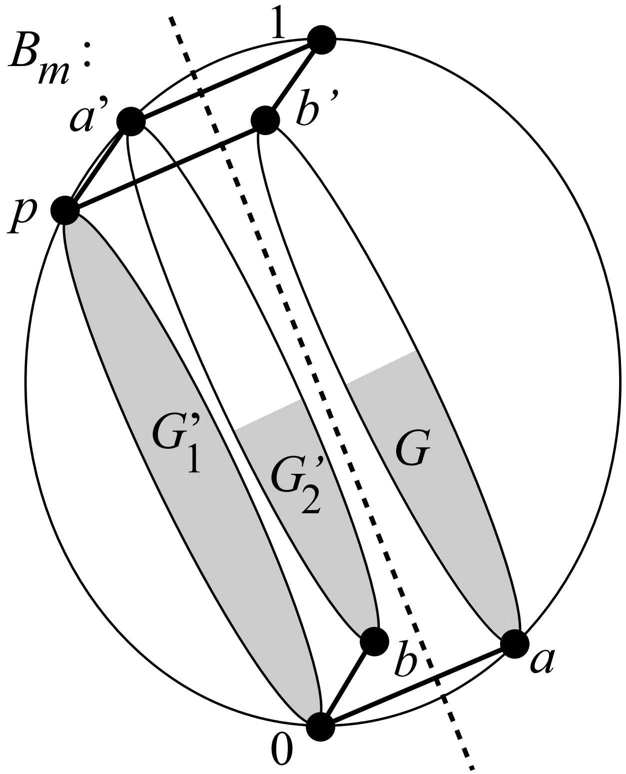
Az átrakott és a visszamaradó elemeket persze mohó r.ideállá rendezzük



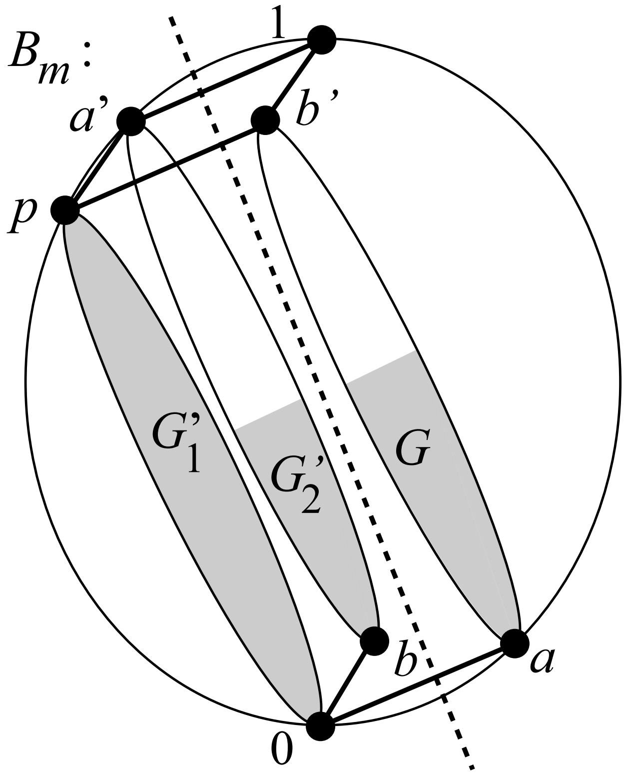
Az átrakott és a visszamaradó elemeket persze mohó r.ideállá rendezzük (ez az $[a, 1] \cong [0, a']$ izomorfizmussal „komptaibilisen" is megtehető!).



A „komptatibilitás” miatt mohó r.ideált kapunk. Az, hogy a magasság nem csökkent, a $\vec{\beta}^{(m)}$ tulajdonságaiból („konvexitás”) következik.



A másik eset (a



A másik eset (amikor $|G'| \leq 2^m/4$) sokkal egyszerűbb: ekkor $G'_2 = \emptyset$, így $X \subseteq {\downarrow}b'$ miatt az ind.hip. azonnal alkalmazható. Q.E.D.

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m-re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$.

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m-re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$. Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\overline{\mathbf{h}}(X) > m/2$.

Bizonyítás. A második mondat:

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m-re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$. Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\overline{\mathbf{h}}(X) > m/2$.

Bizonyítás. A második mondat: a mohó konstrukció igazolja a $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat alkalmas tulajdonsága szerint, ezt nem részletezzük.

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \le \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m-re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$. Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\overline{\mathbf{h}}(X) > m/2$.

Bizonyítás. A második mondat: a mohó konstrukció igazolja a $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat alkalmas tulajdonsága szerint, ezt nem részletezzük.

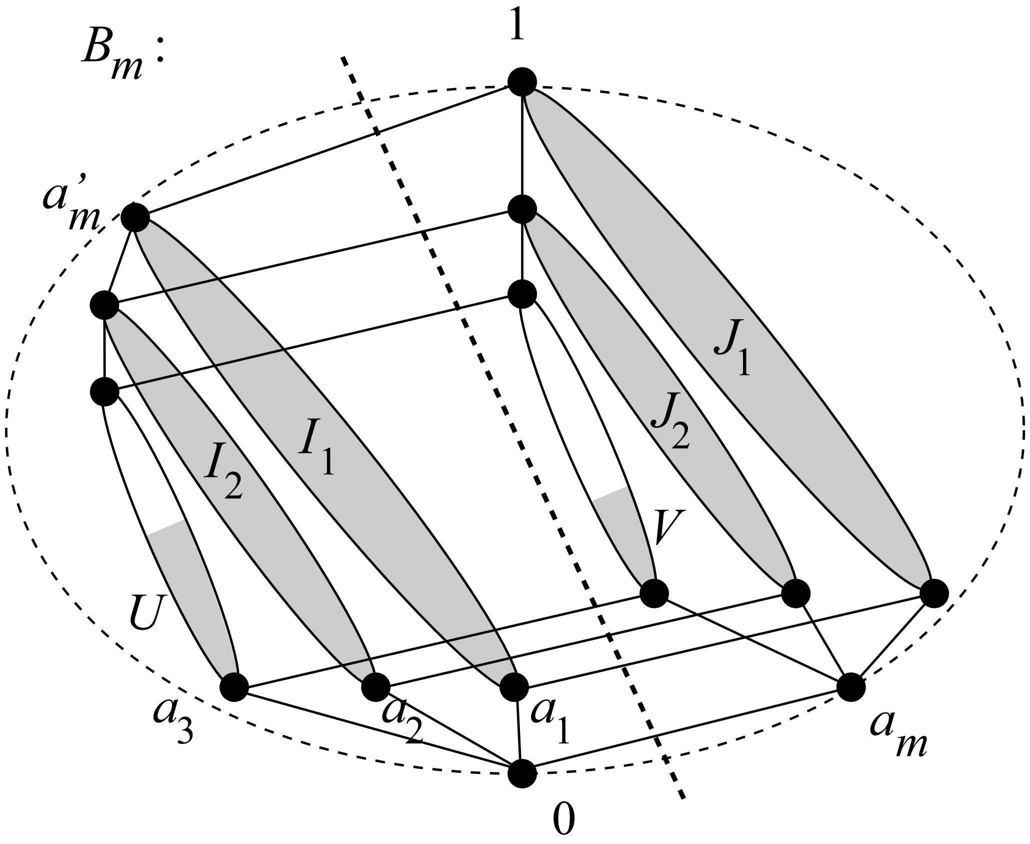
Tfh. $|X| \le \lfloor 2^m/3 \rfloor$. Mivel $B_m \setminus X$ részalgebrája $(B_m, \vee, \emptyset)$-nek, a B_m-re érvényes Frankl-sejtés szerint

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \le \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m-re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\overline{\mathbf{h}}(X) \le m/2$. Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\overline{\mathbf{h}}(X) > m/2$.

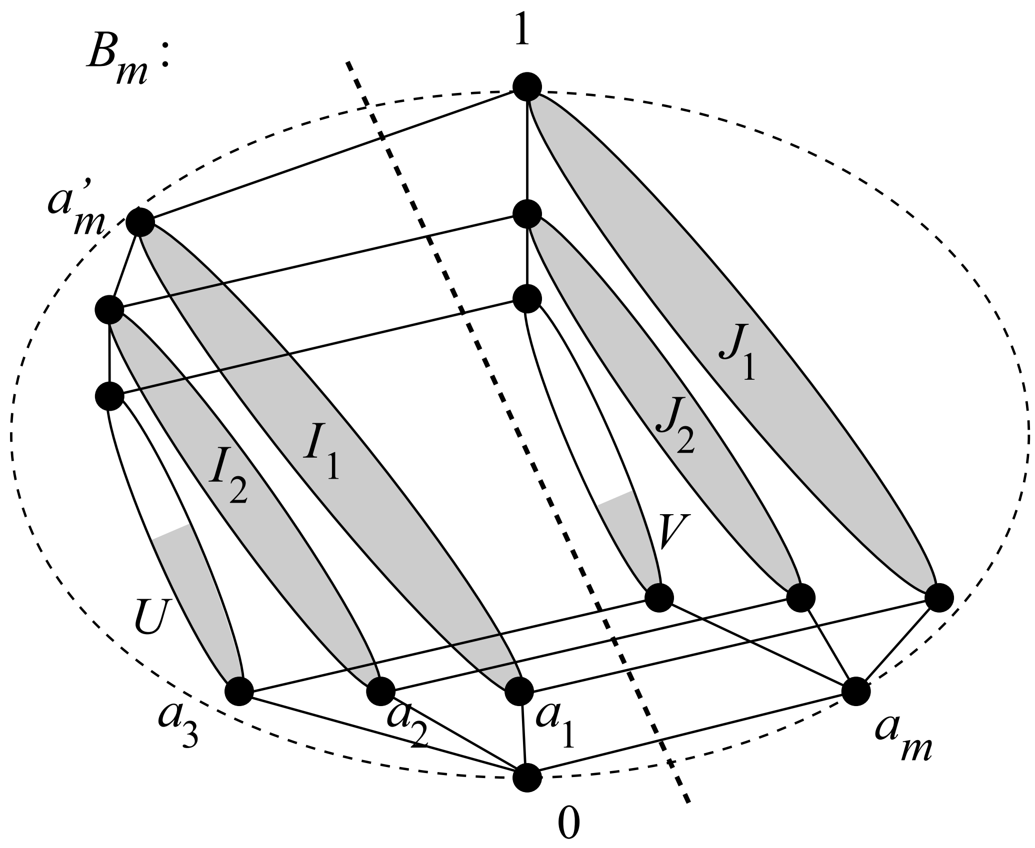
Bizonyítás. A második mondat: a mohó konstrukció igazolja a $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat alkalmas tulajdonsága szerint, ezt nem részletezzük.

Tfh. $|X| \le \lfloor 2^m/3 \rfloor$. Mivel $B_m \setminus X$ részalgebrája $(B_m, \vee, \emptyset)$-nek, a B_m-re érvényes Frankl-sejtés szerint van olyan a_m atom, hogy felette $B_m \setminus X$ elemeinek legalább a fele, azaz X elemeinek legfeljebb a fele van. Legyen $a_1, \ldots, a_{m-1}$ a többi atom, és legyen

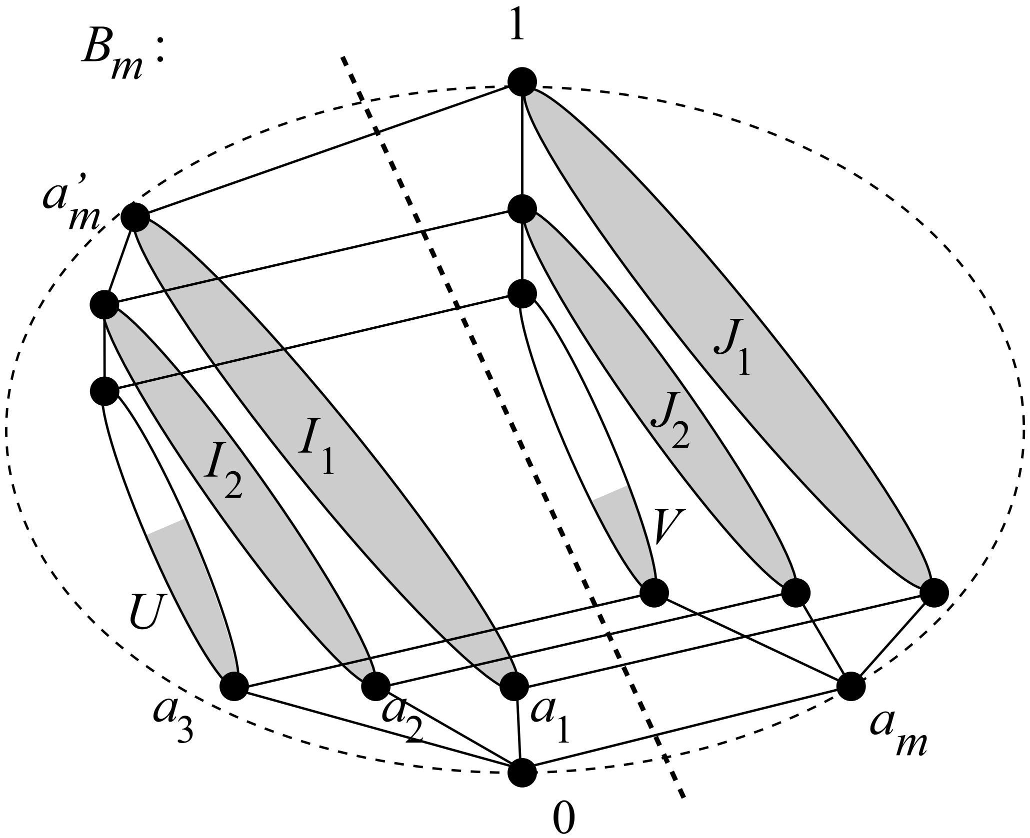
$$X_0 = X \cap {\downarrow} a'_m, \quad X_1 = (X \cap {\uparrow} a_m) \setminus \{a_m\}, \quad X_2 = X \cap \{a_m\}$$



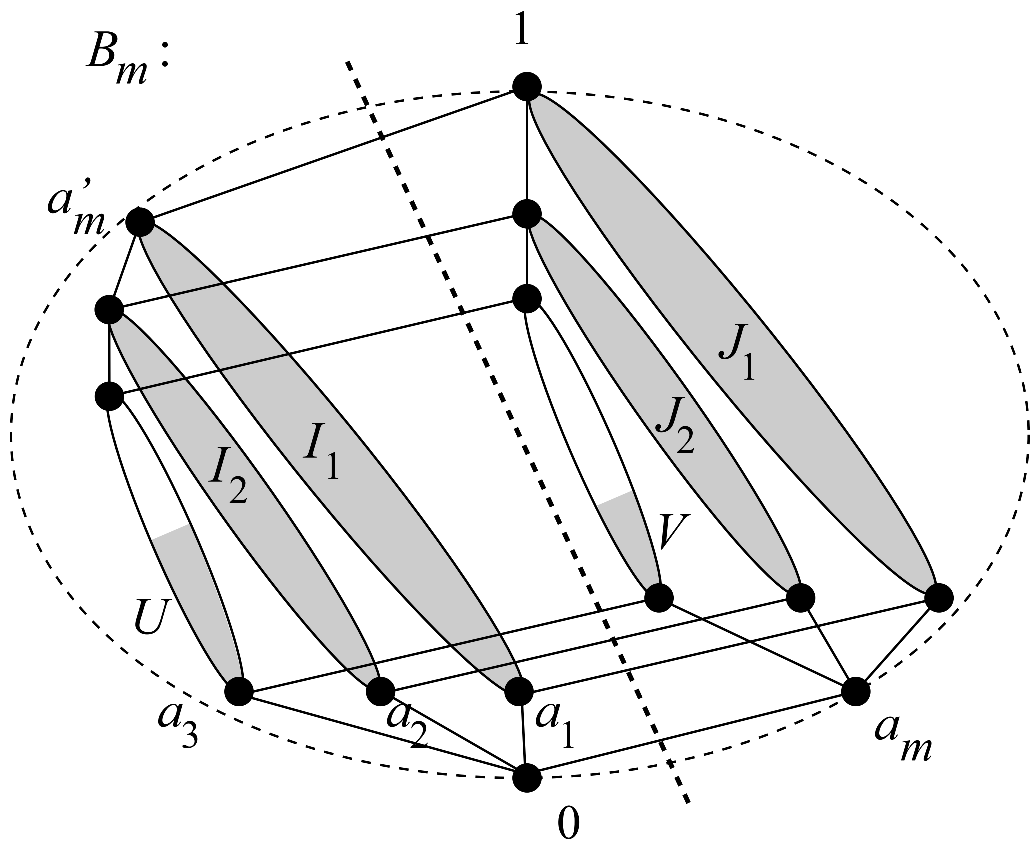
Itt tehát $\uparrow a_m$-ben van a kisebbik (vagy $=$) fele X-nek.



Itt tehát $\uparrow a_m$-ben van a kisebbik (vagy =) fele X-nek. A magasságot növeljük, ha (ind.hip.!) $\uparrow a_m$-ban mohó szemiideálra cseréljük X_1-et. (Ábrán a szürke J-k és V.)



Az $[a_m, 1] \cong [0, a'_m]$ izomorfizmussal képezzük le X_1-et $\downarrow a'_m$-be, és az folytassuk $|X_0|$ elemszámú (szürke) mohó szemiideállá $\downarrow a'_m$-ben. (Azért lehet, mert $|X_0| \geq |X_1|$.)

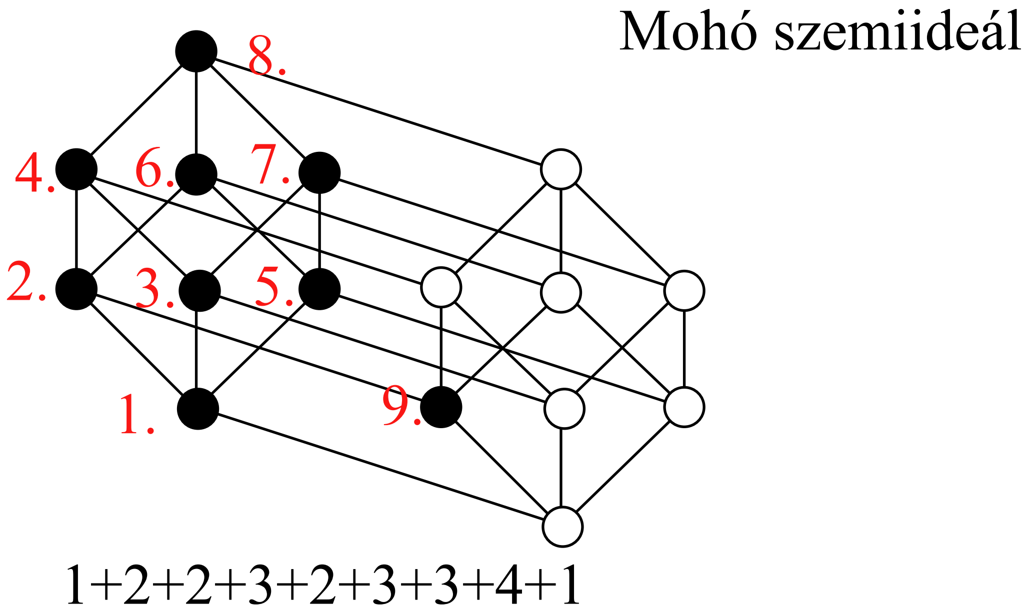


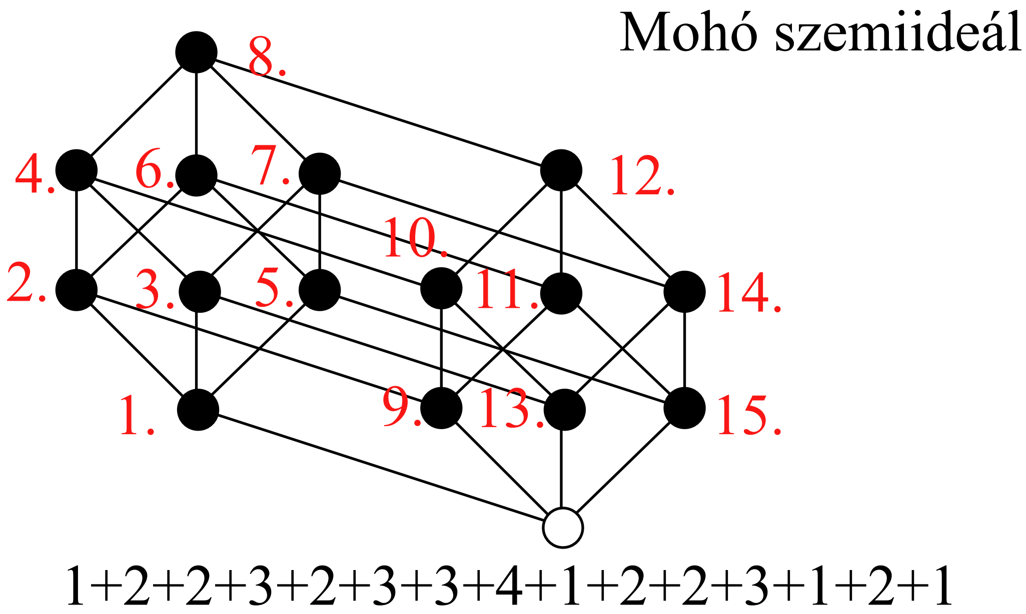
Az $[a_m, 1] \cong [0, a'_m]$ izomorfizmussal képezzük le X_1-et $\downarrow a'_m$-be, és az folytassuk $|X_0|$ elemszámú (szürke) mohó szemiideállá $\downarrow a'_m$-ben. (Azért lehet, mert $|X_0| \geq |X_1|$.) Ind.hip. $\Rightarrow$ $\overline{\mathbf{h}}$ nem csökken.

Emlékezzünk vissza: a mohó szemiideál úgy készül, hogy a Boole-háló felső felét mint mohó ideált feltöltjük, Emlékezzünk vissza: a mohó szemiideál úgy készül, hogy a Boole-háló felső felét mint mohó ideált feltöltjük, majd ezt az eljárást megismételjük az alsó felére. Ah

Emlékezzünk vissza: a mohó szemiideál úgy készül, hogy a Boole-háló felső felét mint mohó ideált feltöltjük, majd ezt az eljárást megismételjük az alsó felére. Ahányszor ezt ismételni kell, azt nevezzük a mohó szemiideál **rangjának** (az ábrán a rang

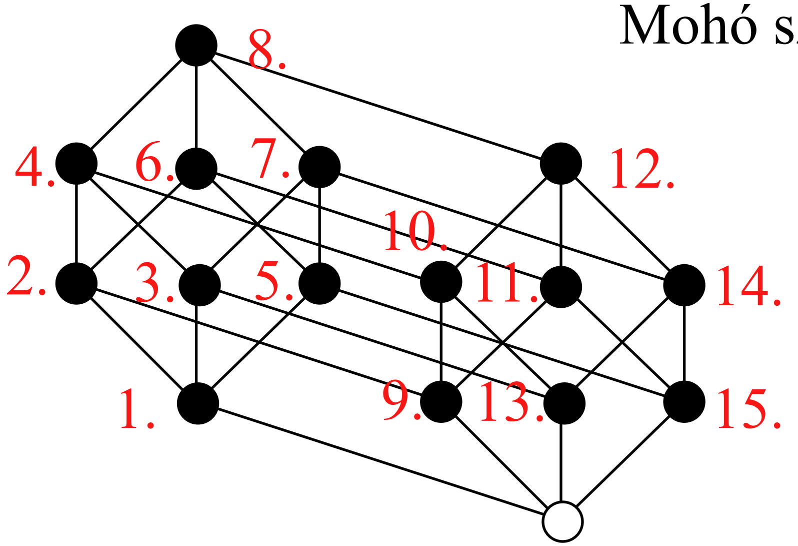
Emlékezzünk vissza: a mohó szemiideál úgy készül, hogy a Boole-háló felső felét mint mohó ideált feltöltjük, majd ezt az eljárást megismételjük az alsó felére. Ahányszor ezt ismételni kell, azt nevezzük a mohó szemiideál **rangjának** (az ábrán a rang = 2.)





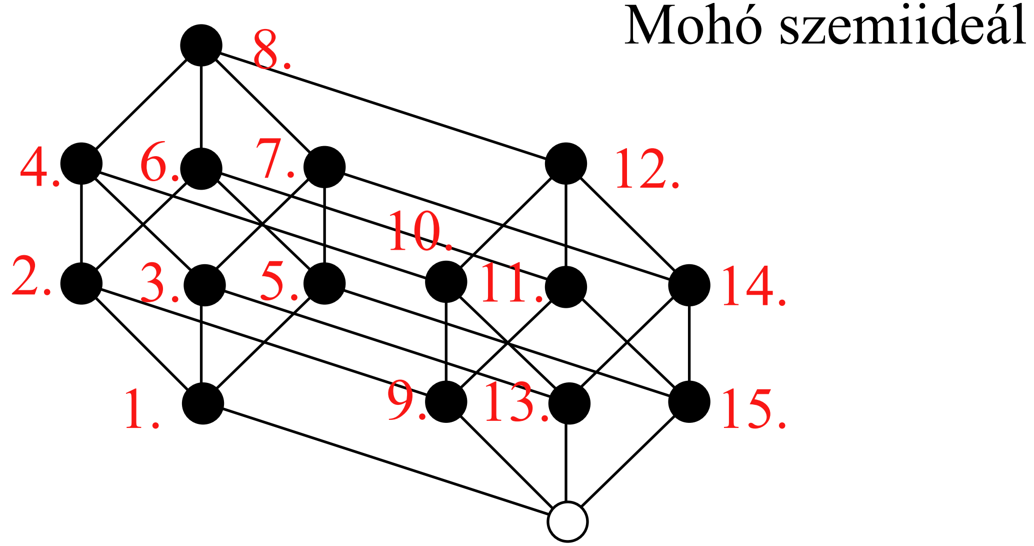
Itt pedig a rang

Mohó szemiideál



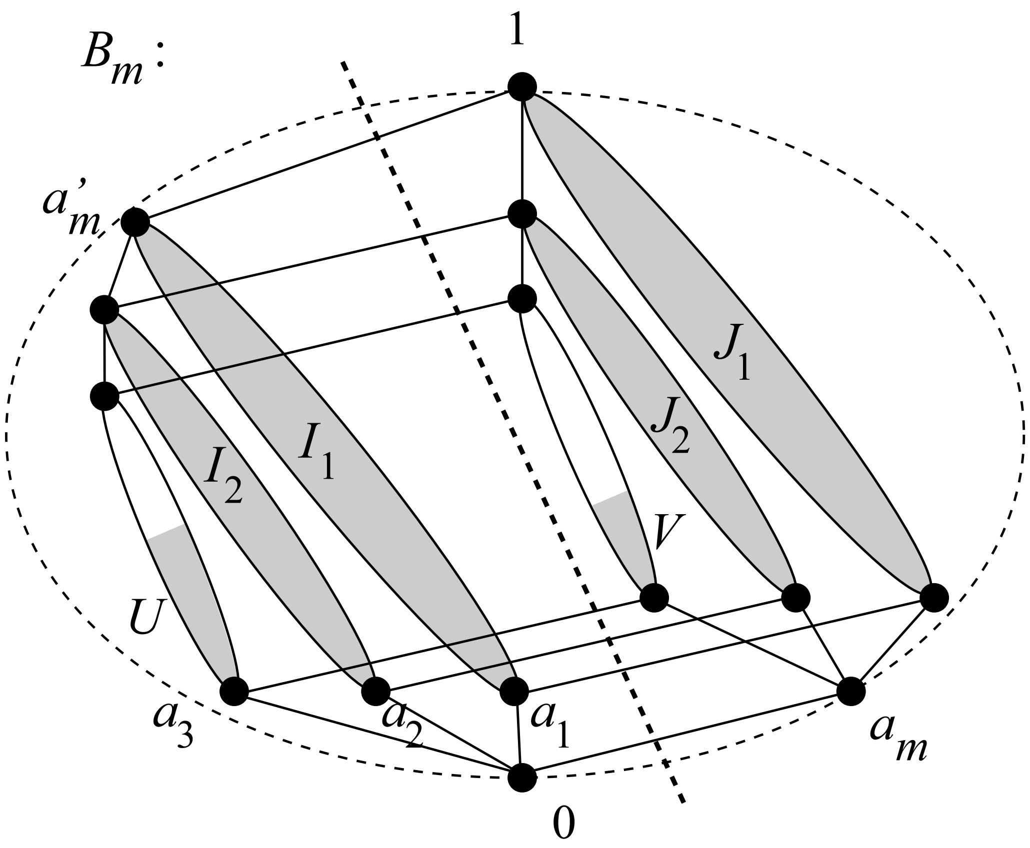
1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

Itt pedig a rang =4. Vis

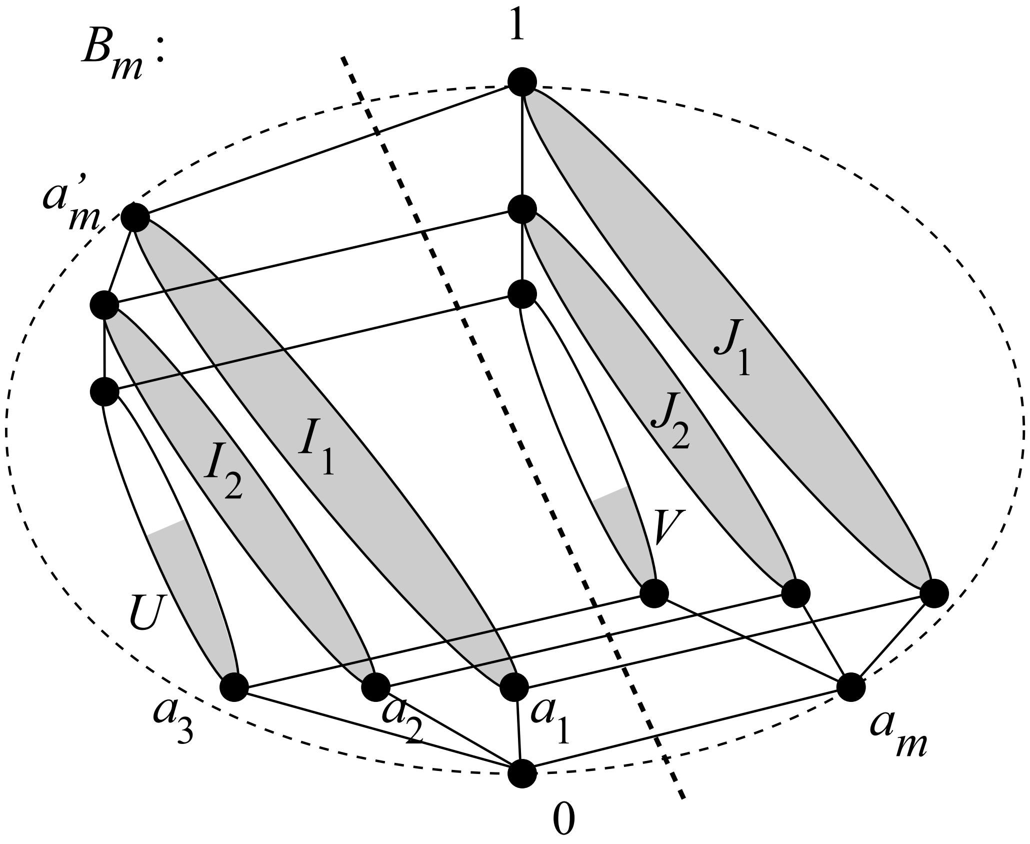


1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

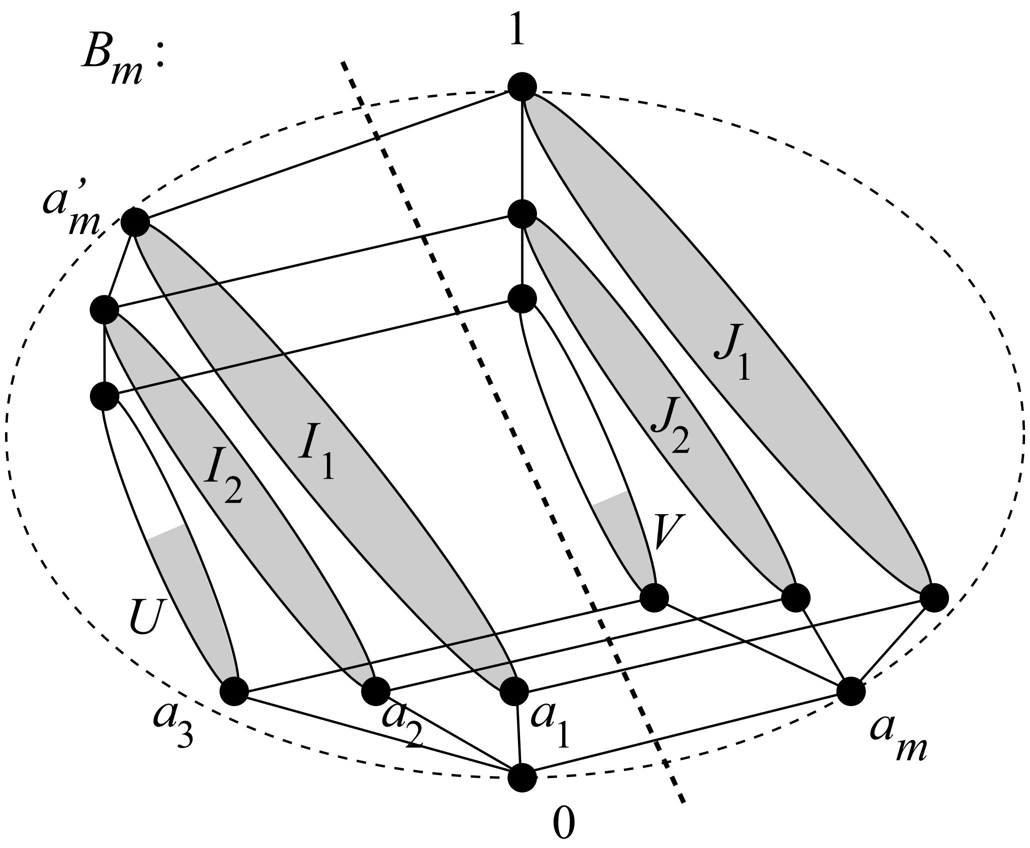
Itt pedig a rang =4. Visszatérve a bizonyításhoz, az első eset az, amikor az $\uparrow a_m$-beli és a $\downarrow a'_m$-beli mohó szemiideálok rangja azonos:



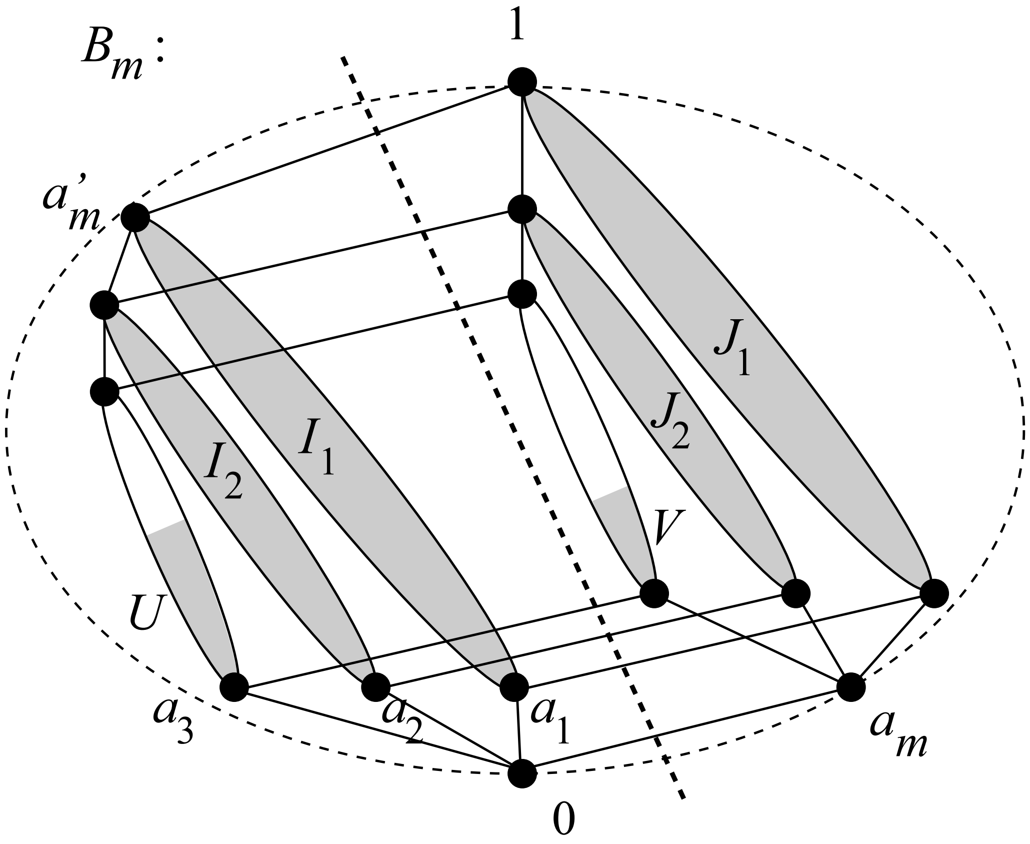
Alkalmazzuk a mohó



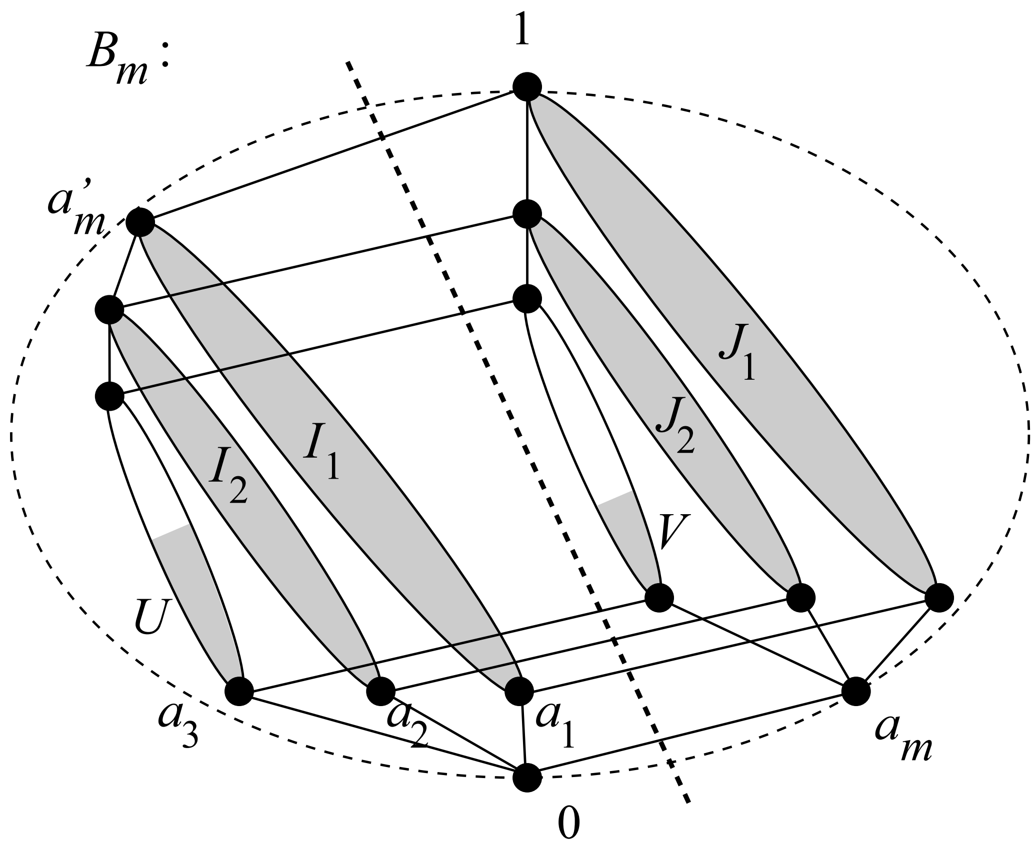
Alkalmazzuk a mohó **r.ideálokra** vonatkozó lemmát az U-t és V-t tartalmazó K_3 intervallumra (az alja a_3):



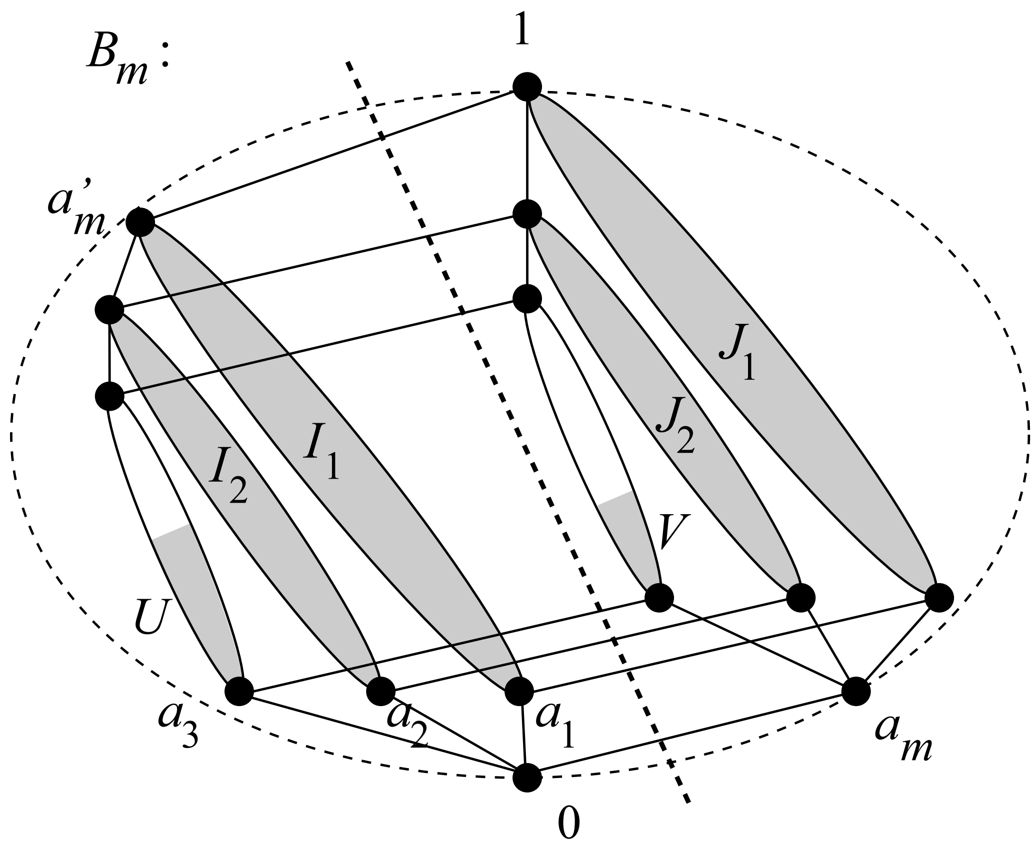
Alkalmazzuk a mohó **r.ideálokra** vonatkozó lemmát az U-t és V-t tartalmazó K_3 intervallumra (az alja a_3): $U \cup V$-t cseréljük ki egy K_3-beli mohó r.ideálra!



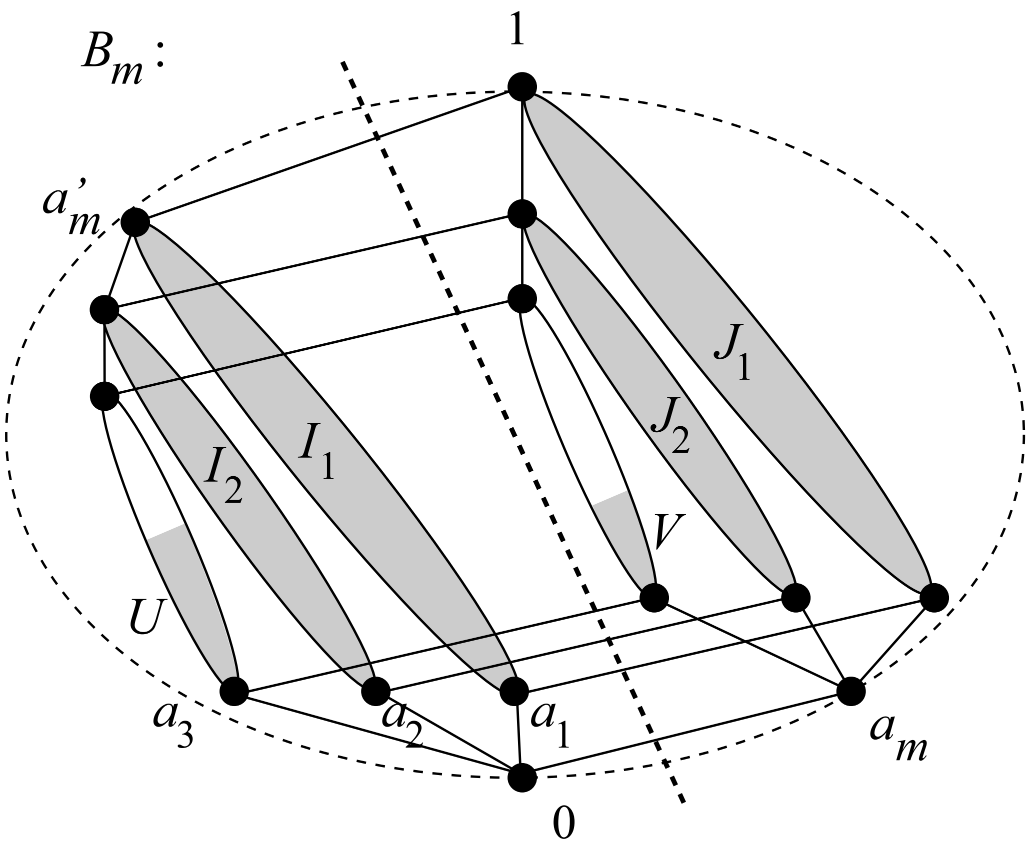
Az átlagmagasság csak nőhet, és $X_0 \cup X_1$ mohó szemiideál lesz!
(



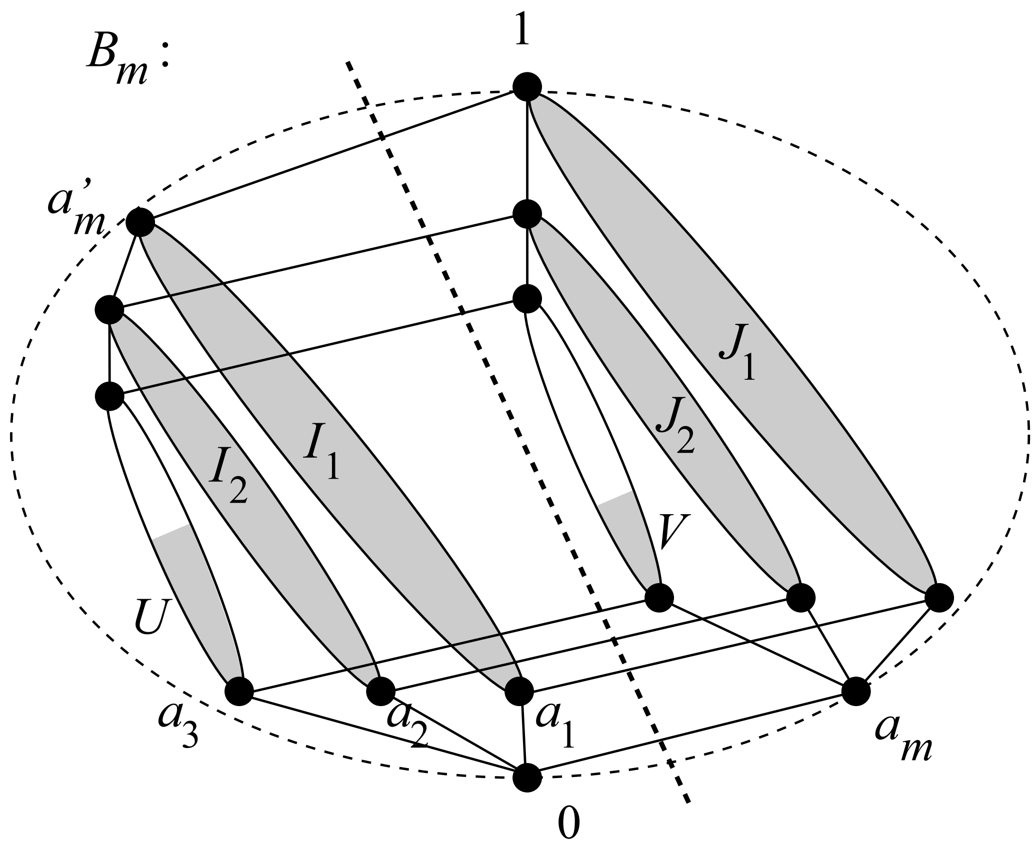
Az átlagmagasság csak nőhet, és $X_0 \cup X_1$ mohó szemiideál lesz!
(Ehhez



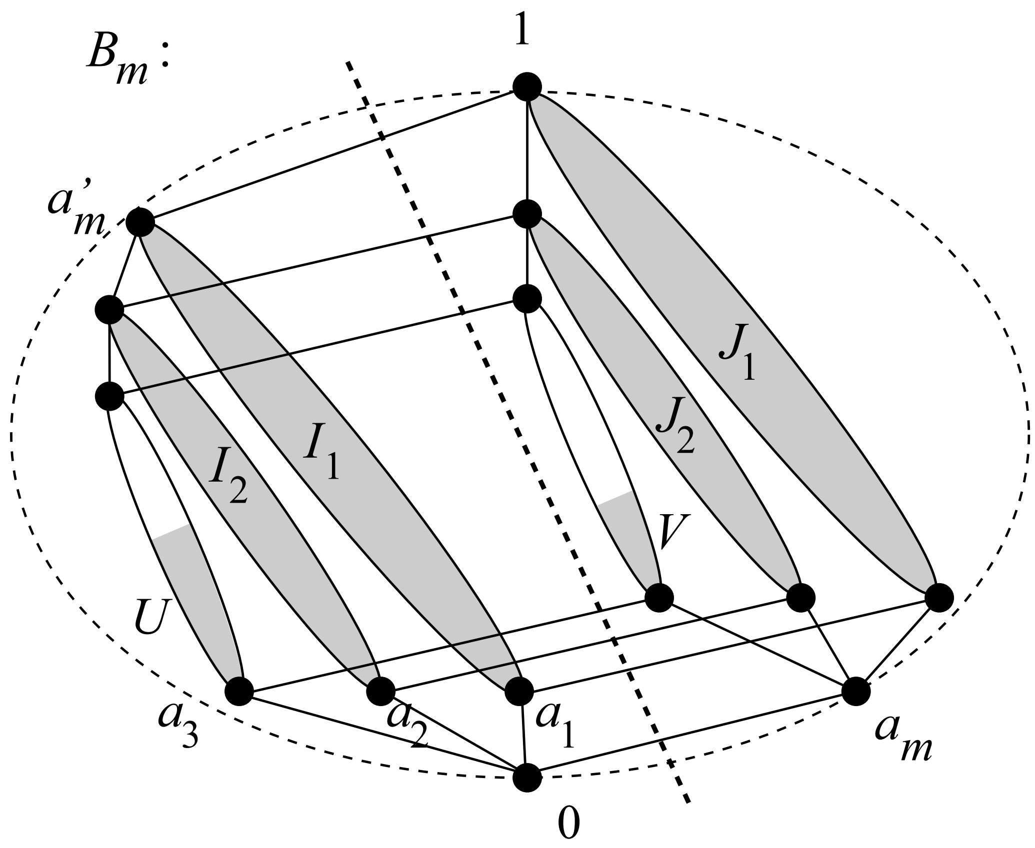
Az átlagmagasság csak nőhet, és $X_0 \cup X_1$ mohó szemiideál lesz! (Ehhez rendre a $K_1 = I_1 \cup J_1$, $K_2 = I_2 \cup J_2$ intervallumokat, és a K_3 intervallum most feltöltött részét tekintsük.)



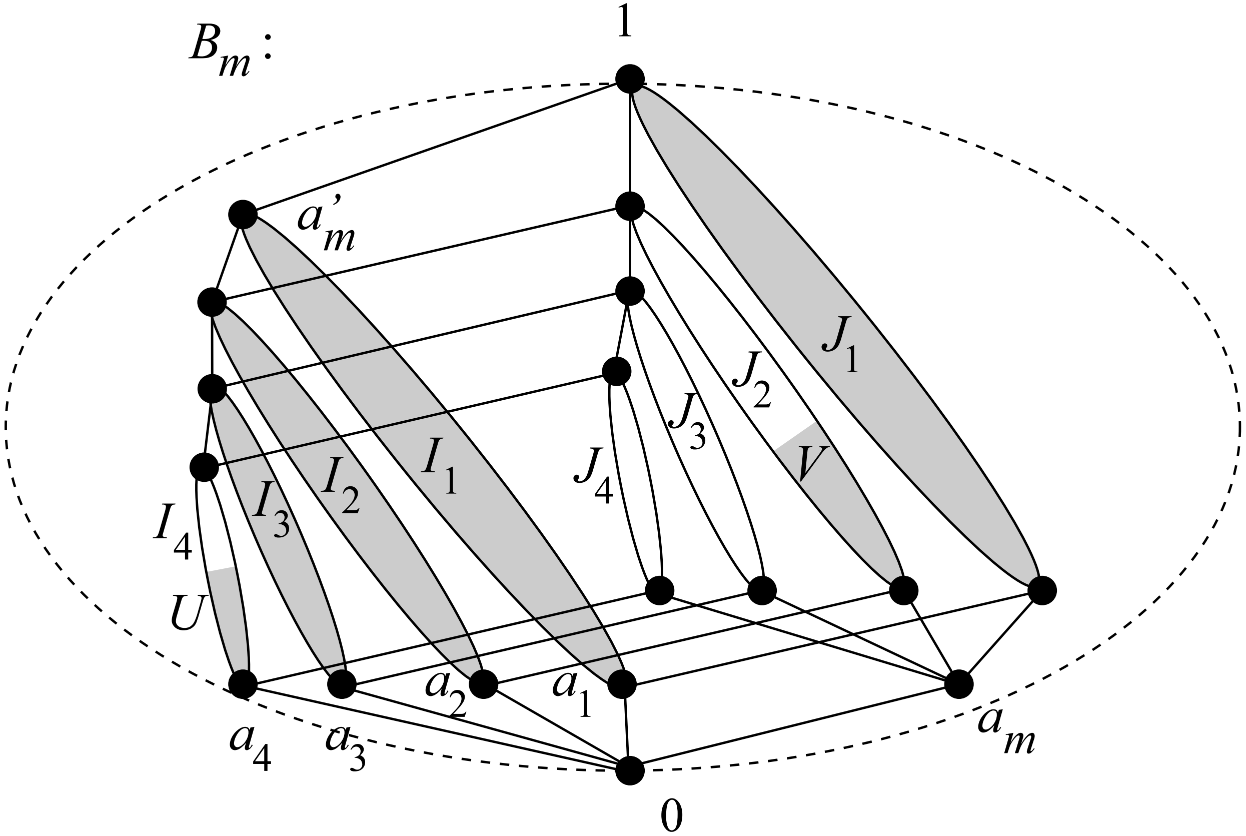
Ha $X_2 = \emptyset$, akkor kész. Egyébként



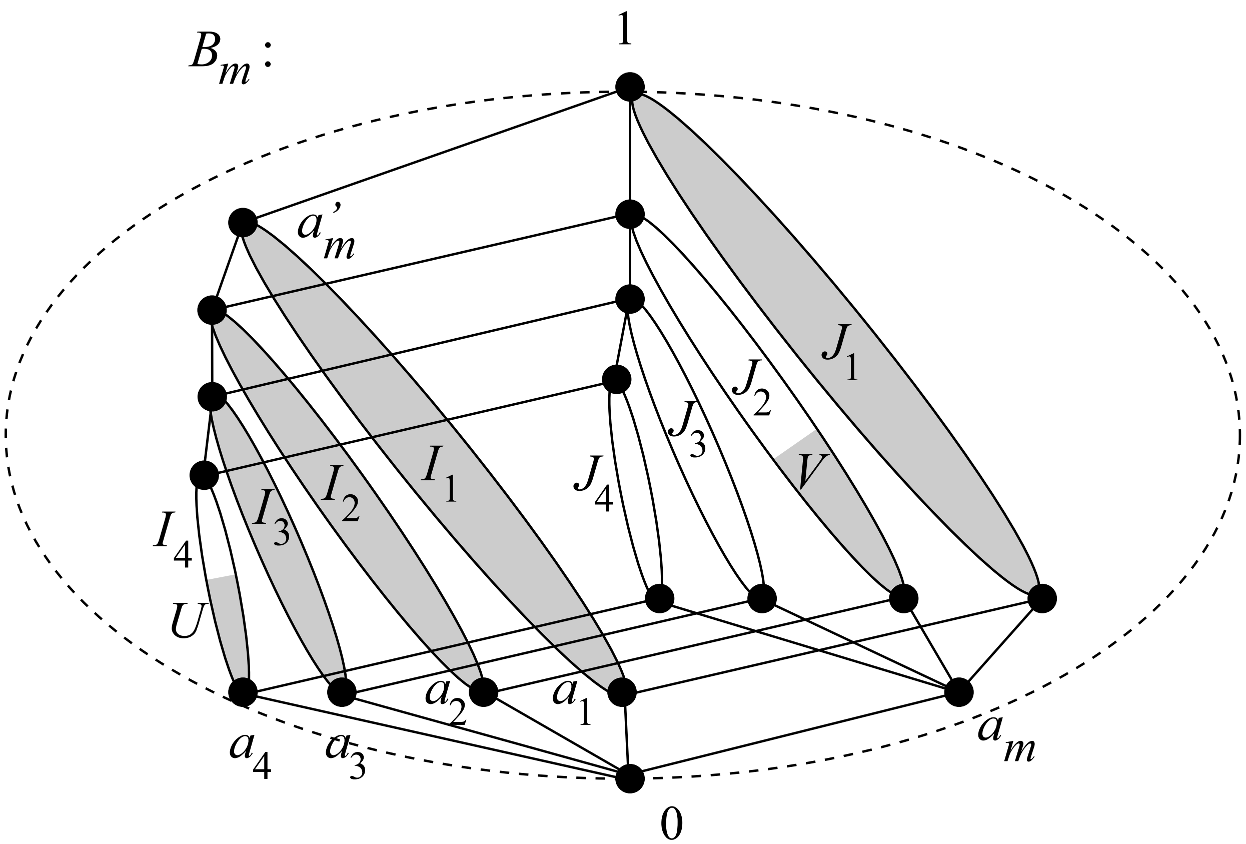
Ha $X_2 = \emptyset$, akkor kész. Egyébként $X_2 = \{a_m\}$ minimális magasságú, tehát a_m-et elhagyva és helyette $X_0 \cup X_1$-et egy elemmel



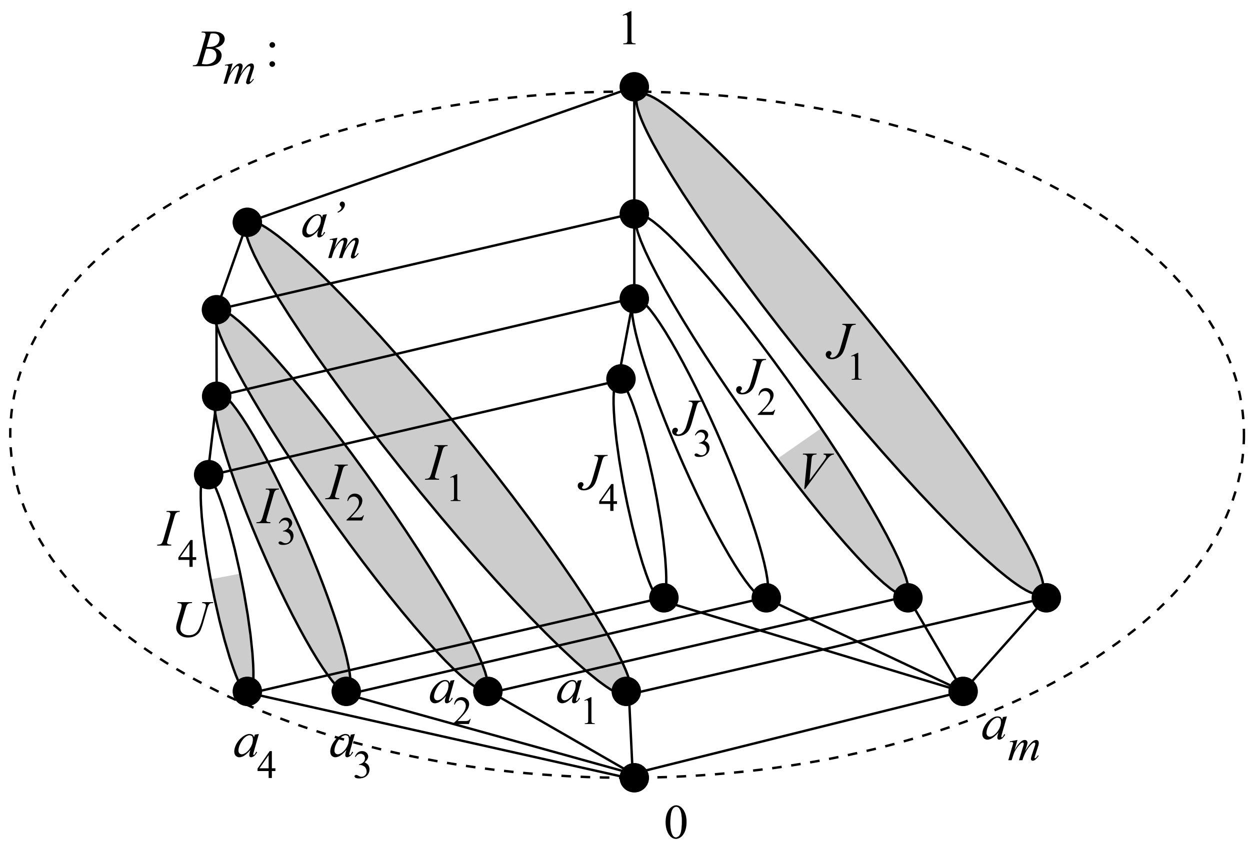
Ha $X_2 = \emptyset$, akkor kész. Egyébként $X_2 = \{a_m\}$ minimális magasságú, tehát a_m-et elhagyva és helyette $X_0 \cup X_1$-et egy elemmel mohó szemiideállá megtoldva az átlagmagasság csak nőhet.



Amikor a két rang nem egyenlő, akkor többször is át kell pakolni a lenti részből a fentibe — a sorozataink tulajdonságai szerint ez működik. (



Amikor a két rang nem egyenlő, akkor többször is át kell pakolni a lenti részből a fentibe — a sorozataink tulajdonságai szerint ez működik. (Bonyolult, nem részletezzük.)



Amikor a két rang nem egyenlő, akkor többször is át kell pakolni a lenti részből a fentibe — a sorozataink tulajdonságai szerint ez működik. (Bonyolult, nem részletezzük.) Q.e.d.

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető . . .)

T

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető . . .)

Ta

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető ...)

Tam

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető . . .)

Tamá

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető . . .)

Tamás

3. Tétel. *Ha L féligmoduláris, akkor az 1/3 helyett 3/8 (azaz a 8/24 helyett 9/24) mondható. Azaz, ha $m = |J(L)| \geq 1$, L féligmoduláris és $|L| > 2^m - \frac{3}{8} \cdot 2^m$, akkor L-re teljesül a Frankl-sejtés.*

4. Tétel. *Ha L* **féligmoduláris és planáris** *és $|L| \geq 4$, akkor L-re teljesül a Frankl-sejtés.* **Sőt**,

- *vagy $1 \in J(L)$ és így $|{\uparrow}a| \leq |L \setminus {\uparrow}a|/3$; vagy pedig*

- *$|{\uparrow}a| \leq |L \setminus {\uparrow}a|$ legalább két $a \in J(L)$-re teljesül.*