Elemi matematika I.

5. alkalom
2014. 03. 10.

1. feladat If a and p are natural numbers such that $a^p - 1$ is prime, then $a = 2$ or $p = 1$.

(Proof. $a \equiv 1(mod\ a-1)$. Then $a^p \equiv 1(mod\ a-1)$, so $a^p - 1 \equiv 0(mod\ a-1)$. Thus $a-1|a^p-1$. However, $a^p - 1$ is prime, so $a - 1 = a^p - 1$ or $a - 1 = \pm 1$. In the former case, $a = a^p$, hence $a = 0, 1$ (which is a contradiction, as neither 1 nor 0 is prime) or $p = 1$. In the latter case, $a = 2$ or $a = 0$. If $a = 0$, however, $0^p - 1 = 0 - 1 = -1$ which is not prime. Therefore, $a = 2$.)

2. feladat If $2^p - 1$ is prime, then p is prime.

(Proof. Suppose that p is composite, hence can be written $p = a \cdot b$ with $a, b > 1$. Then $2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)[(2^a)^{b-1} + (2^a)^{b-2} + \cdots + 2^a + 1]$ so $2^p - 1$ is composite contradicting our assumption that $2^p - 1$ is prime.)

3. feladat If $2^n + 1$ is an odd prime, then n is a power of 2.

(Proof. If n is a positive integer but not a power of 2, then $n = r \cdot s$ where $1 \leq r < n$, $\quad 1 < s \leq n$ and s is odd. By an elementary observation $\left\{n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot b^{n-1-k}.\right\}$, for positive integer m, $\quad (a-b) \mid (a^m - b^m)$. Substituting $a = 2^r, b = -1$, and $m = s$ and using that s is odd, $(2^r + 1) \mid (2^{rs} + 1)$, and thus $(2^r + 1) \mid (2^n + 1)$. Because $1 < 2^r + 1 < 2^n + 1$, it follows that $2^n + 1$ is not prime. Therefore, by contraposition n must be a power of 2.)

4. feladat Bbh $24|13^n + 3 \cdot 5^{n-1} + 8$. (Arany D. 2011. haladók)

5. feladat Mmh $7|333^{444}+444^{333}$ (http://users.itk.ppke.hu/ adorjan/matematika/pdfs/04.pdf)

6. feladat Oldjuk meg a prímszámok halmazán: $x^y + 1 = z$. (http://users.itk.ppke.hu/ adorjan/matematika/pdfs/04.pdf)

7. feladat Mmh. $10|2^9 + 2^{99}$ (http://www.math.ubbcluj.ro/ andrasz/CD/Megold9/1fej.pdf)

8. feladat Bbh, ha $a = b \cdot c + d$, akkor $(a, b) = (b, d)$. (http://www.math.ubbcluj.ro/ andrasz/CD/Megold9/1fej.pdf)

(Legyen $(a, b) = x$ és $(b, d) = y$. Ekkor igazolni kell, hogy $x = y$. $x|a, x|b$, így $x|bc$, azaz $x|a - bc$, vagyis $x|d$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $x|y$. Hasonlóan bizonyítható a fordított oszthatóság is, amiből következik, hogy $x = y$.)

9. feladat Adjunk algoritmust az lkkt és az lnko meghatározására.

(Legyen $a > b$. Osszuk a-t b-vel: $a = b \cdot q_1 + r_1$. Osszuk b-t r_1-gyel: $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$. Osszuk r_2-t r_1-gyel: $r_2 = r_1 \cdot q_3 + r_3$ és így tovább; $(n \geq 2)$ esetén r_n-et r_{n-1}-gyel osztjuk: $r_n = r_{n-1} \cdot q_{n+1} + r_{n+1}$. Előző feladat alapján $(r_n, r_{n+1}) = (a, b)$ $\forall n \geq 1$. Az utolsó nullától különböző maradék az lnko. Euklideszi-alg. Ha t az lkkt, akkor $t = \dfrac{ab}{d}$.)

10. feladat Egy 8×8-as sakktábla négyzeteibe 1-től 64-ig számokat írunk be balról jobbra, fölülről lefelé haladva. Ezután a tábla mezőit minden lehetséges módon lefedjük egy 2×2-es négyzettel. Hány esetben lesz a letakart számok összege 3-mal osztható? (Gerőcs 95/3/7)