A sztochasztika alapjai feladatok 3.

1. Feladat. Augusztusban öt éjszakán át figyeltük meg a hullócsillagok számát, és a következő mintát kaptuk: 4, 3, 7, 2, 4. Tudjuk, hogy a hullócsillagok száma Poisson-eloszlást követ. Készítsünk maximum-likelihood becslést az eloszlás paraméterére az adott minta alapján!

2. Feladat. Egy városban a gépkocsik rendszámai pozitív egész számok, 1-től kezdődően. Adjunk maximum-likelihood becslést a városban található gépkocsik számára a következő megfigyelések alapján: 133, 1984, 7330, 8475!

3. Feladat. Egy alkatrészből álló sokaság 6 mintapéldányának következő volt a teljes éllettartama: 39, 45, 67, 50, 50, 60 (hónap). Tegyük fel, hogy az élettartam exponenciális eloszlású egy ismeretlen λ paraméterrel. Számoljuk ki a λ paraméter maximum-likelihood becslését!

4. Feladat. Böhönyén fél éven keresztül vizsgáltuk az egy hónapban történt közúti balesetek számát, és a következő mintát kaptuk: 1, 4, 3, 5, 2, 3. Tudjuk, hogy a balesetek száma Poisson-eloszlást követ. Adjunk maximum-likelihood becslést az eloszlás paraméterére az adott minta alapján!

5. Feladat. Egy céllövő p valószínűséggel talál el egy célpontot egy lövésből. Adjunk maximum-likelihood becslést p-re, ha az első találat k-adikra következett be!

6. Feladat. Egy céllövő p valószínűséggel talál el egy célpontot egy lövésből. Húsz lövést ad le a céltáblára. Ezek közül pontosan a 4., az 5., 9., 15. és 18. talál célba. Adjunk p-re maximum-likelihood becslést, a minta alapján!

7. Feladat. Legyen $x_1, \ldots, x_n$ az $[1, \Theta]$ intervallumon egyenletes eloszlásból származó minta, ahol Θ ismeretlen. Adjunk maximum-likelihood becslést Θ-ra!

8. Feladat. Adjuk meg egy ismeretlen helyzetű, 1 hosszúságú intervallum felezőpontjának maximum-likelihood becslését a következő (egyenletes eloszlásból származó) minta alapján: 1,1; 1,9; 1,3; 1,5; 1,7; 1,99.

9. Feladat. Tegyük fel, hogy egy almáskertben a fákat egy fertőzés támadja meg. A fertőzött fák száma Poisson-eloszlást követ. Tíz egyforma nagy, egyenként három sorból álló ültetvényben rendre 0, 3, 0, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 2 beteg fát találtak. Adjunk maximum-likelihood becslést az egy sorban található fertőzött fák számának várható értékére!

10. Feladat. Egy tóban a halakat betegség támadta meg, mely az egyes egyedeket ismert $0 < p < 1$ valószínűséggel pusztítja el. A kifogott haltetemek k számából adjunk maximum-likelihood becslést a betegség előtt a tóban élő halak számára! Adjunk konkrét becslést, ha $k = 100$ és $p = 0,05$!

11. Feladat. Egy gyermek játékszer fizikai terhelhetőségére elvégzett próbatesztek a következő mérési eredményekre vezettek: 40, 45, 40, 42, 36 (kg). Adjuk meg a terhelhetőség empirikus várható értékét, varianciáját és korrigált empirikus varianciáját!

12. Feladat. A Pick Szeged kézilabdacsapat 7 játékosának magassága a következő: 195, 205, 190, 187, 183, 194, 190. Számold ki az empirikus várható értéket, az empirikus szórást és a korrigált empirikus szórást erre a mintára! Mennyi az empirikus eloszlásfüggvény értéke 185-ben és 192-ben?

13. Feladat. A Pick Szeged kézilabdásainak tömege hozzávetőleg normális eloszlást követ. A csapat 7 játékosának tömege a következő: 114, 98, 107, 86, 83, 89, 102.

a) Adjunk a minta alapján 0,9; 0,95 és 0,99 megbízhatósági szintű konfidencia-intervallumokat a szegedi kézilabdás fiúk tömegének várható értékére, feltéve, hogy a szórás ismert: $\sigma = 10$ kg!

b) Adjuk meg konfidencia-intervallumokat mindhárom megbízhatósági szint mellett, ha a szórás is ismeretlen!

c) Adjunk ugyanilyen megbízhatósági szintű konfidencia-intervallum becsléseket a szórásra!

d) Hogyan változnak ezek az intervallumok, ha nem tételezzük fel, hogy a testtömeg normális eloszlást követ?

14. Feladat. A LEN-kupa győztes Szeged Beton VE vízilabdacsapat öt játékosának magasságadatai alapján adj $0,95$ megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a vízilabdások várható magasságára! A mért adatok: 194, 201, 179, 198, 185 (cm). (Feltételezzük, hogy a vízilabdások magasságeloszlása megközelítően normális eloszlást követ.)

15. Feladat. A LEN-kupa győztes Szeged Beton VE vízilabdacsapat öt játékosának tömegadatai alapján adj $0,9$ megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a vízilabdások várható tömegére! A mért adatok: 83, 104, 75, 115, 93 (kg). (Feltételezzük, hogy a vízilabdások tömegeloszlása megközelítően normális eloszlást követ.) Teszteljük 5%-os szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy a vízilabdások várható tömege 110 kg! Mennyi az empirikus eloszlásfüggvény értéke 72-ben és 106-ban?

16. Feladat. A férfi és a női teniszezők magasságának szórását mérték. 25 - 25 sportolót megmérve a szórás korrigált becslése a férfiaknál 9 cm, míg a nőknél 6 cm. Elfogadjuk-e a hipotézist $\alpha = 0,1$ szignifikancia szinten, hogy a férfi teniszezők magasságának szórása megegyezik a teniszezőnők magasságának szórásával?

17. Feladat. A férfi és a női teniszezők magasságának szórását mérték. 10 - 10 sportolót megmérve a szórás korrigált becslése a férfiaknál 12 cm, míg a nőknél 4 cm. Elfogadjuk-e a hipotézist $\alpha = 0,1$ szignifikancia szinten, hogy a férfi teniszezők magasságának szórása kétszerese a teniszezőnők magasságának szórásánál?

18. Feladat. Tekintsük a 11. feladatbeli mintát. Tudjuk, hogy a terhelhetőség normális eloszlást követ. Adjunk meg egy olyan intervallumot, amely a szórást 0,95 valószínűséggel tartalmazza! Teszteljük $\alpha = 0,01$ szinten azt a nullhipotézist, mely szerint a terhelhetőség várható értéke 36 kg!

19. Feladat. Tekintsük a 12. feladatbeli mintát. Tegyük fel, hogy a testmagasság szórása ismert: $\sigma = 5$ cm. Teszteljük azt a nullhipotézist 5%-os szignifikancia szinten, hogy a kézilabdás fiúk várható magassága:

a) 175 cm,

b) 190 cm,

c) 205 cm.

d) Teszteljük a fenti különböző nullhipotéziseket 1%-os szignifikancia szinten is!

Végezzük el a teszteket úgy is, ha σ ismeretlen!

20. Feladat. Két folyadéktöltő automatára mérték meg a szórást. 101–101 palack valódi tartalmát ellenőrizve a szórás (korrigálatlan) becslései 1,05 illetve 1,11 deciliter. Különbözik-e a két szórás $\alpha = 0,1$ szinten?

21. Feladat. Az előző feladat eredménye alapján feltehetjük, hogy a két folyadéktöltő automata szórása megegyezik. A mért valódi tartalmak alapján az empirikus várható értékre rendre $2,03$ és $0,98$ liter adódott a két automata esetén. Teszteljük $\alpha = 0,1$ szignifikancia szinten azt a nullhipotézist, hogy az első automata 1 literrel tölt többet egy adagba, mint a második.

22. Feladat. Egy dobókockával 90-szer dobtunk. A dobott számok között 9 db 1-es, 17 db 2-es, 19 db 3-as, 12 db 4-es, 10 db 5-ös és 23 db 6-os szerepelt. Teszteljük azt a nullhipotézist, hogy a kocka szabályos!

A pluszpontos feladatok beadási határideje: