A sztochasztika alapjai

Szorgalmi feladatok

2011. tavaszi szemeszter

1. feladat Egy kockával dobva mi a dobott szám eloszlásfüggvénye, várható értéke, szórása?

2. feladat Egy marketingakció keretében egy adott termék vásárlásakor dobhatsz egy szabályos dobókockával. Ha hatost dobsz, akkor egy 500 Ft értékű szakácskönyvet, ha négyest vagy ötöst, akkor egy 200 Ft értékű bögrét, ha pedig kettest vagy hármast akkor egy 50 Ft értékű hűtőmágnest kapsz ajándékba. Ha egyest dobsz, akkor semmit sem nyertél. Írjuk fel a nyeremény értékének eloszlását, várható értékét és szórását!

3. feladat Van három szabályos ,,dobótestünk": egy tetraéder, egy kocka és egy oktaéder. A tetraéderen 1-től 4-ig, a kockán 1-től 6-ig, míg az oktaéderen 1-től 8-ig szerepelnek számok, minden lapon pontosan egy. A három testet egyszerre feldobjuk. Határozzuk meg a dobott számok összegének várható értékét!

4. feladat Két kockával dobunk. Ha a számok összege 7, 11 vagy 12, akkor nyerünk 40 forintot, ha 2 vagy 3, akkor nyerünk 60-at, egyéb esetben pedig veszítünk 15-öt. Mennyi a nyeremény várható értéke és szórása?

5. feladat Két kockával dobunk. Ha mindkét kocka legalább 4-es, nyerünk 60 petákot, ha mindkettő legfeljebb 3-as, akkor veszítünk 20-at, egyéb esetben nyerünk 20-at. Adjuk meg a nyeremény eloszlását! Mennyi a nyeremény várható értéke és szórása?

6. feladat A következő játékot játszuk: feldobunk egy kockát, és ha a dobott szám legalább 4-es, akkor a szám 4-szeresét nyerjük, egyéb esetben pedig a dobott szám 6-szorosát kell kifizetnünk. Mennyi a nyeremény várható értéke és szórása?

7. feladat Hat kockával dobva mi a dobott számok maximumának eloszlása?

8. feladat Négy barát meg akarja ajándékozni egymást mikulásra. Mindannyian felírják a nevüket egy cetlire és azokat beleteszik egy urnába. Ezután sorban kihúznak egy-egy cetlit, és mindenki annak ad ajándékot, akinek a nevét húzta. Írjuk fel a magukat húzó gyerekek számának eloszlását, ábrázoljuk az eloszlásfüggvényét! Számoljuk ki várható értékét és szórását!

9. feladat /+4 pont/ Az előző feladatot oldjuk meg tetszőleges n számú gyerek esetén (természetesen ábrázolni nem kell)! Ha n tart a végtelenbe, akkor hova tart annak a valószínűsége, hogy senki sem a saját nevét húzza?

10. feladat /+2 pont/ A pétervári játék a következő: egy játékos részvételi díjat fizet a kaszinónak, majd az első fejig dobál egy szabályos érmével. Ha a k-adik dobásra jön ki az első fej, akkor a játékos 2^k dukátot nyer. Mennyi az igazságos részvételi díj?
Módosítsuk a játékot: Ha a játékos első 99 dobása írás, akkor véget ér a játék és 2^{100} dukátot kap a játékos. Mennyi az igazságos részvételi díj?

11. feladat /+2 pont/ Egy országban a munka törvénykönyve alapján egy gyártulajdonosnak az üzem összes dolgozójának szabadságot kell adnia, ha valamelyik dolgozónak születésnapja van. Továbbá egy dolgozó nem diszkriminálható a születésnapja alapján. Az év 365 munkanapból áll és egy munkás egy nap alatt egy terméket állít elő. Hány munkást vegyen fel a tulajdonos, hogy maximális legyen az egy év alatt gyártott termékek számának várható értéke?

12. feladat Legyen ξ véletlen változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \sin x & \text{ha } x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

Határozd meg ξ várható értékét és szórásnégyzetét!

13. feladat Válasszunk egy egységnégyzetben véletlenszerűen egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Jelölje ξ a pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

14. feladat Az egységkör belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Adjuk meg a választott pont középponttól vett távolságának eloszlás- és sűrűségfüggvényét, valamint számoljuk ki a várható értékét!

15. feladat András és Béla reggel 7:30 és 8:00 között egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint érkeznek iskolába. A kapuban megvárják egymást és együtt mennek be a terembe. Adjuk meg a terembe érkezésük időpontjának eloszlásfüggvényét és várható értékét!

16. feladat +2 pont Válasszuk a ξ és η pontokat egymástól függetlenül a $(-1, 1)$ intervallumban az egyenletességi hipotézis szerint. Tekintsük a következő másodfokú egyenletet: $x^2 + 2\xi x + \eta + 1 = 0$. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a gyökök valósak!

17. feladat Egy villanykörtét gyártó cég termékei között 8% selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott körte között

a) legalább 2 selejtes,

b) pontosan 4 selejtes lesz?

18. feladat Egy halastóban 1000 hal van. Egyik nap kihalásznak közülük 100-at. Ezeket valamilyen módon megjelölik, majd visszadobják őket. Másnap megint kihalásznak 100 halat. Határozd meg a második nap kifogott megjelölt halak számának eloszlását, várható értékét és szórását, ha

a) visszatevéssel halászunk,

b) visszatevés nélkül halásszuk ki a halakat!

19. feladat Végezzük a következő kísérletet: egy pakli francia kártyából visszatevés nélkül húzunk egymás után 3 lapot. A jelölje azt az eseményt, hogy elsőre pikket húzunk, másodikra a treff ászt és harmadikra is treffet.

a) Mennyi A bekövetkezésének valószínűsége?

b) A kísérletet 4-szer egymás után elvégezzük. ξ véletlen válatozó jelölje, hogy A hányszor következett be. $P(\xi = 2) =?$; $E(\xi) =?$

c) A kísérletet A első bekövetkezéséig ismételgetjük. η véletlen változó jelölje az elvégzett kísérletek számát! Mennyi η várható értéke és szórása?

20. feladat Egy üzemben annak a valószínűsége, hogy egy ott gyártott harisnya hibás $\frac{1}{1000}$. A harisnyákat kétszázasával csomagolják dobozokba. 1000 doboz közül átlag hány olyan lesz, amely csak hibátlan harisnyákat tartalmaz?

21. feladat Egy villamoson $p = 0,04$ valószínűséggel jelennek meg ellenőrök, és a bliccelőket 3000 forintra megbírságolják. Mennyi a valószínűsége, hogy a bírság fedezi egy bliccelő által a lebukásig okozott kárt, ha a jegy ára 150 forint? Várhatóan hányadik alkalommal kapják el az ellenőrök a bliccelőt?

22. feladat Egy izzó minden egyes bekapcsoláskor 0,005 valószínűséggel kiég. Legyen ξ véletlen változó értéke a kiégésig végbemenő bekapcsolások száma. Számoljuk ki a várható értékét és szórását! Mennyi a valószínűsége, hogy a várható értékénél tovább tudjuk használni?

23. feladat Egy kockával az első hatosig dobunk. Nyereményünk a dobások számának ötszöröse. Adjuk meg a nyeremény eloszlását, várható értékét és szórását.

24. feladat Egy kockával addig dobunk ismételten, míg összesen 3 db hatost nem dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan ötször kellett dobni? Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

25. feladat Egy vizsgán 4 kérdésből álló beugró teszt van, amiben minden kérdésre 4 válaszlehetőség közül kell kiválasztani a helyeset és legalább 3 jó választ kell adni. Béla nem hajlandó készülni, elmegy szerencsét próbálni. Várhatóan hány jó választ ad? Mennyi a valószínűsége, hogy vizsgázhat? Ezzel a módszerrel várhatóan hányadik próbálkozásra sikerül a beugrója? Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 kísérletből sikerül?

26. feladat Várhatóan hány hetet kell várnunk arra, hogy az ötös lottó nyerőszámai az 1,2,3,4,5 számok legyenek (minden héten egy számötöst húznak ki)? Mennyi a valószínűsége, hogy több mint 100 évet kell várni?

27. feladat 3-an húznak Mikulásra. Ha valaki a saját nevét húzza megismétlik a húzást. Várhatóan hányan húzzák a saját nevüket elsőre? Várhatóan hányadikra lesz jó a húzás? Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 2-szer kell húzni?

28. feladat Egy augusztusi éjszaka alatt megfigyelhető csillaghullások száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?

29. feladat Egy biztosítótársaság felmérte, hogy 0,0002 valószínűséggel keletkezik egy családi házban tűzkár. Mennyi a valószínűsége, hogy 15000 házból kevesebb, mint 4-ben fog előfordulni tűzkár? (Közelítsünk Poisson-eloszlással!)

30. feladat Nagy számú lövést adunk le egy kör alakú célpontra 1 percen keresztül. A nagy távolság miatt azonban az egyes találatok valószínűsége kicsiny, vagyis Poisson eloszlást követ. Átlagosan 15 találatot érünk el percenként. Mennyi a valószínűsége, hogy 15-nél több találatunk lesz a következő 1 percben?

31. feladat ξ véletlen változó egyenletes eloszlású a $(-3, b)$ intervallumon, és tudjuk, hogy szórásnégyzete 48. Számítsd ki b értékét és ξ várható értékét! Mennyi a valószínűsége, hogy ξ negatív értéket vesz fel?

32. feladat Nóra átlagosan 22 percet telefonál barátjával. A telefonbeszélgetés hossza (percekben mérve) egyenletes eloszlást követ egy (a, b) intervallumon, szórásnégyzete pedig 108. Számítsd ki a és b értékét! Mennyi annak valószínűsége, hogy Nóra több, mint fél órát telefonál barátjával?

33. feladat Borbála mikulásra egy sólámpát kapott, amelyben lévő izzó élettartama exponenciális eloszlást követ λ paraméterrel. Annak valószínűsége, hogy az izzó tovább bírja 1 évnél $0,606$. Várhatóan mennyi ideig működik? Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 év alatt kiég?

34. feladat Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál kevesebb, mint hat perc alatt sorra kerülünk 2/3. Feltéve, hogy a várakozási idő hossza exponenciális eloszlású átlagosan mennyit kell várni? Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a kúthoz érkezve legalább 10 percet kell várakozni?

35. feladat A lett koboldoknak születésükkor 4 cm-es bajuszuk van és évente további 2 cm-t nő. Tegyük fel, hogy a koboldok "élettartama" exponenciális eloszlást követ 200 év várható értékkel. Várhatóan hány centiméteres bajusszal hal meg egy véletlenül kiválasztott kobold? Mennyi a valószínűsége, hogy egy koboldnak halálakor hosszabb lesz a bajusza, mint 2 méter?

36. feladat Egy radioaktív anyag bomlását vizsgáljuk. Legyen ξ véletlen változó értéke egy tetszőleges atom bomlásáig eltelt idő, és annak valószínűsége, hogy az anyag egy tetszőleges atomja x éven belül elbomlik: $P(\xi < x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$. Határozzuk meg a véletlen változó várható értékét, szórását, valamint a bomlás felezési idejét (azt az időpontot, amikorra az atomok fele bomlott el)!

37. feladat Egy plazma TV élettartama exponenciális eloszlású 9 év várható értékű véletlen változó. Adjuk meg azt a legnagyobb K számot, melyre legalább $0,9$ annak a valószínűsége, hogy legalább K évig nem romlik el a televízió!

38. feladat /+2 pont/ Bizonyítsuk be, hogy az exponenciális eloszlású véletlen változók rendelkeznek az „örökifjú" tulajdonsággal, vagyis, ha ξ exponenciális eloszlású v. v., akkor $\mathrm{P}(\xi \geq T + t | \xi \geq T) = \mathrm{P}(\xi \geq t)$!

39. feladat A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ: a macskák 10%-a könnyebb, mint $1,5$ kg és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb házimacskák aránya?

40. feladat Egy gép, amely munkadarabokat készít, 40 cm-re van beállítva. A hiba normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Annak a valószínűsége, hogy egy munkadarab 40,5 cm-nél nagyobb 0,05. Mennyi a hiba szórása?

41. feladat A közgazdász hallgatók valószínűségszámítás gyakorlaton szerzett pontszáma közelítőleg normális eloszlású. 8%-uk szerzett kevesebb, mint 25 pontot és 12%-uk szerzett több, mint 43 pontot. Mekkora hányaduk szerzett legalább 28, de legfeljebb 38 pontot?

42. feladat Egy löveg tüzel egy 1200 m távolságra lévő célpontra. A lőtávolság normális eloszlású 1200 m várható értékkel, 40 m szórással. Hatásosnak tekinthető egy lövés, ha a tévedés kevesebb, mint 20 méter. Mennyi a valószínűsége, hogy egy lövés hatástalan?

43. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy az Algoritmusok és adatszerkezetek előadásra érkező hallgatók beférnek a 219 férőhelyes Kiss Árpád tanterembe, ha tudjuk hogy a kurzust felvett 500 hallgató mindegyike egymástól függetlenül $p = 0,4$ valószínűséggel megy be az előadásra?

44. feladat Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél $p = 0,75$. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 130 lövés talál célba?

45. feladat Egy választókörzetben 40000 szavazó él. Választáskor mindenki elmegy szavazni és mivel mindkét jelölt nagyon szimpatikus, ezért mindenki $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az egyik, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel a másik jelöltre szavaz. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két jelöltre leadott szavazatok száma között legfeljebb 40 lesz a különbség?

46. feladat Egy pakli magyar kártyát jól összekeverünk, majd kihúzunk egy kártyát. Ezt még 249-szer megismételjük. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott királyok száma legalább 25 és legfeljebb 40?

47. feladat 10000 választó mindegyike 0,51 valószínűséggel szavaz az A jelöltre. Mennyi a valószínűsége, hogy több mint a fele választó az A jelöltre szavaz?

48. feladat Egy szabályos pénzérmét 1000-szer feldobunk. Legalább mennyi fejet dobunk 0,99 valószínűséggel? /A De-Moivre -Laplace tétel felhasználásával adjunk meg egy olyan k értéket, melyre legalább 0,99 annak a valószínűsége, hogy legalább k fejet dobunk!/

49. feladat Egy adott repülőgép esetén a két meghibásodás között eltelt időtartam exponenciális eloszlást követ, 30 nap várható értékkel. A repülőt 100 meghibásodás után kivonják a forgalomból. Mennyi a valósznűsége, hogy 3600 napnál tovább üzemelhet?

50. feladat /+3 pont/ Budapesten a dohányzók arányát akarjuk megtudni. Legalább hány lakost kell megkérdeznünk, ha azt akarjuk, hogy a dohányosoknak a kapott válaszok alapján számolt aránya a dohányosok tényleges arányától legfeljebb 0,01-dal térjen el legalább $0,99$ valószínűséggel?

A pluszpontos feladatok beadási határideje: 2010. április 18.