

A sztochasztika alapjai

Szorgalmi feladatok

2011. tavaszi szemeszter

1. feladat Feldobunk egy kockát és egy pénzérmét. Írjuk fel az eseményteret!

2. feladat Egy kockát ötször egymás után feldobunk. Jelöljük B_j -vel azt az eseményt, hogy a j -edik dobás hatos. Fejezzük ki B_1, \dots, B_5 segítségével a következő eseményeket:

- az ötödik dobásra kapunk először hatost,
- legalább egyszer hatost dobunk,
- pontosan négyszer dobunk hatost,
- az első és a negyedik dobás hatos, a többi közül az egyik biztosan nem hatos!

3. feladat Két dobókockával dobunk. Milyen kapcsolatban vannak az alábbi A és B események? Adjuk meg $A \cap B$ -t!

- A : páratlan az összeg, B : dupla hatost dobunk,
- A : páros az összeg, B : dupla hatost dobunk,
- C : páratlan az összeg, B : legalább egy hatost dobunk.

4. feladat A és B tetszőleges események, $P(A) = 0,3$ és $P(B) = 0,8$. Adjunk alsó és felső becsléseket $P(A \cup B)$ és $P(A \cap B)$ valószínűségekre!

5. feladat Egy társaság tagjait nyelvtudásuk szerint csoportosítjuk. Legyen A az az esemény, hogy egy véletlenül kiválasztott személy angolul, B , hogy oroszul és C , hogy franciául beszél. A következőket tudjuk:

$$P(A) = 0,35, \quad P(B) = 0,4, \quad P(C) = 0,3$$

$$P(A \cap B) = 0,15, \quad P(A \cap C) = 0,2, \quad P(B \cap C) = 0,2, \quad P(A \cap B \cap C) = 0,1.$$

Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott személy legalább az egyik nyelven tud a három közül?

6. feladat Egy 5 tagú férfitársaság vacsorázni ment egy étterembe. Kalapjaikat a ruhatárban hagyták. Vacsora és borozgatás után kalapjaikat teljesen véletlenszerűen vitték el a ruhatárból. Mi a valószínűsége, hogy a társaságnak legalább egy tagja a saját kalapját vitte haza?

7. feladat 5 dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az 1,2,3 számok mindegyike előfordul a dobott számok között?

8. feladat 6 pakli francia kártyát teszünk ki az asztalra, mindegyikből húzunk 1 lapot. Mi a valószínűsége, hogy a 4 szín valamelyikéből nem húztunk?

9. feladat 6 urna mindegyikében 1 piros, 2 kék és 3 sárga golyó van. Mindegyikből húzunk egy-egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyik színből húztunk?

10. feladat 10 gyerek véletlenszerűen sorba áll. Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) a legmagasabb áll legelől,
- b) a legmagasabb az első 3-ban van,
- c) a legmagasabb és a legalacsonyabb között pontosan két gyerek áll?

11. feladat Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, mindenki rendel egy italt: összesen 3 korsó sört, 4 pohár vörös- és 2 pohár fehérbort. A pincér taláalomra osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?

12. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 találatunk lesz az 5-ös lottón? És annak, hogy legalább 3 találatunk?

13. feladat Az 5-ös lottón 90 számból húznak 5-öt, a 6-os lottón 45-ből 6-ot. Minek nagyobb a valószínűsége:

- a) 5-ös lottón legalább 4 találat;
- b) 6-os lottón legalább 5 találat?

14. feladat Egy urnában 2 fehér, 4 kék, 6 fekete golyó van. Taláalomra kiveszünk kettőt visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy

- a) kettő fehéret húzunk,
- b) azonos színűeket húzunk,
- c) különböző színűeket húzunk?

15. feladat Egy urnában 4 fehér és 8 kék golyó van. Visszatevéssel húzunk hármat? Mennyi a valószínűsége, hogy húztunk fehéret és kéket is?

16. feladat Egy pakli magyarkártyából véletlenszerűen kihúzzunk 5 lapot. Mi a valószínűsége, hogy

- a) kihúztuk a zöld ászot,
- b) a húzott lapok közt lesz VII-es,
- c) az összes lap azonos színű lesz?

17. feladat 52 lapos francia kártyából 5 lapot húzunk. Mi a valószínűsége, hogy

- a) full,
- b) póker,
- c) royal flush

van a kezünkben?

18. feladat Holnap egyik jogász barátunk egy olyan „karikázós” tesztet ír, melyen összesen öt kérdés van és minden kérdésre négy lehetséges válasz, de ahelyett, hogy készülne, egész este velünk sörözik. Mennyi a valószínűsége, hogy barátunk legalább négy pontot ér el a teszten, ha minden helyes válasz egy pontot ér?

19. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy két kockával dobva

- a) a kidobott számok megegyeznek,
- b) nem lesz hatos,
- c) a dobott számok összege 7,
- d) a dobott számok összege 9?

20. feladat Mennyi a valószínűsége, hogy négy kockával dobva a dobott számok közt szerepel hatos?

21. feladat Mi a valószínűsége, hogy egy 30 fős csoportban van legalább két ember, akik egy napon ünneplik a születésnapjukat? (A születésnapok $1/365$ valószínűséggel esnek az egyes napokra.)

22. feladat /+2 pont/ N golyót elhelyezünk N urnába, úgy hogy minden egyes golyó azonos valószínűséggel kerül bármelyik urnába. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy urna marad üresen?

23. feladat /+2 pont/ (Igazságos osztzkodás problémája.) Anna és Béla betesz ezer-ezer forintot és az nyeri a pénzt, aki előbb ér el 10 pontot a következő játékban. Felváltva dobálnak egy pénzérmét, fej esetén Anna kap egy pontot, ellenkező esetben pedig Béla. Béla 7-5-ös vezetésénél a pénzérme beleesik a csatornába. Hogyan osztozzanak igazságosan a pénzen?

24. feladat /+2 pont/ A kenőban 80 számból húznak 20-at. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzottak között nem lesznek szomszédosak?

25. feladat Egy még létező, vásártereken játszott régi angol játék a pennygurítás: adott egy 2 egység oldalhosszúságú négyzetháló és egy 1 egység átmérőjű penny. A cél az, hogy az elgurított penny ne essen vonalra. Hogyan számítjuk ki a nyeresi esélyeket?

26. feladat Egy kikötőbe a nap 24 órája alatt két hajó érkezik egymástól függetlenül véletlen időpontokban. A munkások az elsőt 1, a másodikat 2 óra alatt tudják kirakodni. Az előbb érkező hajó kirakodását azonnal megkezdik. Amennyiben a másik hajó úgy érkezik, hogy a munkások az elsővel még nem végeztek, a később érkező kénytelen várakozni. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik hajónak sem kell várnia?

27. feladat A $(0, 1)$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott pont segítségével három részre. Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom szakasz hossza

- a) kisebb, mint $1/2$,
- b) nagyobb, mint $1/4$?

28. feladat A $(0, 1)$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott pont segítségével három részre. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott három szakaszból háromszög szerkeszthető?

29. feladat A $(0, 1)$ intervallumon találmra választunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy különbségük abszolút értéke kisebb lesz mint a kisebbik szám?

30. feladat A $(0, 1)$ intervallumon találmra választunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy összegük $1/2$ és 1 közé esik?

31. feladat Anna és Bogi megbeszélnek, hogy 10 és 11 között találkoznak a TIK kávézójában. Érkezésük ebben az órában véletlenszerű. Anna akár 20 percet is hajlandó várni barátnőjére, míg Bogi kicsit türelmetlenebb, ő 10 perc várakozás után elmegy. Mennyi a valószínűsége, hogy összejön a találkozó?

32. feladat Egy egység sugarú kör területén megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találmra választunk egy másik pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}$?

33. feladat /+2 pont/ A $(0, 1)$ intervallumra egymástól függetlenül 3 pontot dobunk egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy ezeknek a 0-tól vett távolságaival mint szakaszokkal háromszöget lehet alkotni?

34. feladat Egy pénzérmét 3-szor dobunk fel. Vizsgáljuk meg függetlenség szempontjából a következő eseményeket:

A: elsőre írást, másodikra fejet dobunk;

B: több fejet dobunk mint írást;

C: mindháromszor ugyanazt dobjuk!

35. feladat /+1 pont/ Alexandra és Bence találkozót beszélnek meg. Egymástól függetlenül mindketten 10 és 11 között véletlenszerűen érkeznek. Vizsgáljuk meg a következő eseményeket függetlenség szempontjából:

A: Alexandra legalább fél órát vár;

B: Bence 10:30 és 10:45 között érkezik;

C: Alexandra 10:15 és 10:30 között érkezik!

36. feladat 4 golyót helyeztünk el egy kalapban: 1 fehéret, 1 kéket és 2 pirosat. A kalapot megráztuk, majd Jani kihúzott belőle két golyót. Megnézte őket és fennhangon kijelentette, hogy van piros a kihúzottak között. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét kihúzott golyó piros?

37. feladat Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik hatos?

38. feladat Barátunk $\frac{2}{3}$ valószínűséggel tartózkodik kocsmában (egyébként máshol iszik). Ha kocsmában van, akkor az 5 kocsmában bármelyikében egyenlő valószínűséggel. Négyben már megnéztük, de nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödikben megtaláljuk?

39. feladat Egy kalapban 5 fehér, 5 piros, és 5 zöld golyó van. Három golyót kiveszünk találmra visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első golyó piros, a második fehér, és a harmadik ismét piros lesz?

40. feladat Egy pakli magyar kártyából (32 lap) húzunk négy lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy elsőre pirosat, másodikra zöldet, harmadikra pirosat és negyedikre tőköt húzunk?

41. feladat Egy titokzatos afrikai kórt 1000 odautazóból átlagosan 1 kap el. A betegség szűrőtesztjének elvégzésekor a fertőzöttek 99%-ánál pozitív, az egészségesek 98%-ánál negatív eredményt kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) egy hazaérkező ember tesztje pozitív,

b) ha egy ember tesztje pozitív, akkor valóban fertőzött?

42. feladat /+2 pont/ 25 diák vizsgázni megy, húsz tételből kell húzni egyet. Tízen megtanultak mindent, tízen 10 tételt tudnak, öten pedig csupán 2 tételt néztek át. Ha valaki megtanult egy tételt, akkor 90%, hogy abból nem bukik meg, azonban ha valaki ismeretlen tételt húz akkor 90%, hogy megbukik. Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) egy találmra kiválasztott diák jó tételt húz,
- b) egy találmra kiválasztott diák átmegy a vizsgán,
- c) egy sikeres vizsgázó jó tételt húzott,
- d) egy sikeres vizsgázó mindent megtanult?

43. feladat Tamás feleletválasztós tesztet ír (a, b, c, d válaszlehetőség). A kérdések 60%-ánál úgy gondolja, hogy tudja a választ és ilyenkor az esetek 90%-ában valóban jó a válasza. A kérdések 30%-ánál két lehetőségre szűkíti a kört (ilyenkor valóban e kettő között van a jó válasz), és ezek közül véletlenszerűen választ. A maradék 10%-ban fogalma sincs és csak tippel. Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) egy adott kérdésre jól válaszolt Tamás,
- b) ha egy adott kérdésre jól válaszolt, akkor valóban tudta?

44. feladat /+1 pont/ 5 kockát feldobunk. A hatosokat megtartjuk, majd a többivel újra dobunk (ezután többször már nem dobunk). Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) mindegyik hatos
- b) előre nem dobtunk hatost, ha a végén mind hatos?

45. feladat Egy üzemben 3 gépsor van, az első adja a termelés 40%-át, a másik kettő 30-30%-át. Az első és a második gépsor 0,05 valószínűséggel termel selejtet, a harmadik 0,1 valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége, hogy

- a) az üzem termékei közül egyet kiválasztva az selejtes lesz,
- b) ha találunk egy selejtes terméket, azt az első gép gyártotta?

46. feladat Vándorlásai közben Odüsszeusz egyszer egy hármass útélágazáshoz ért. Tudta, hogy az egyik út Athénba, a másik Mükénébe, a harmadik pedig Spártába vezet, de nem tudta, hogy melyik hova. Azt is tudta, hogy az athéniak átlagosan csak minden harmadik alkalommal mondanak igazat, a mükénéiek minden második alkalommal hazudnak, a spártaiak viszont becsületesek, sohasem hazudnak. Találmra választott egy utat, és azon ment, mendegélt, míg egy városba nem ért. Ott az első szembejövő embertől megkérdezte, mennyi kétszer kettő és azt a választ kapta, hogy négy. Mi a valószínűsége annak, hogy Odüsszeusz Athénba érkezett?

47. feladat Egy televíziós vetélkedőben 3 csukott ajtó valamelyike mögött egy autó, a másik kettő mögött egy-egy kecske van. A játékos választ egy ajtót, majd a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egy olyat, amelyik kecskét rejt. Ezután felajánlja a játékosnak, hogy most még meggondolhatja magát és választhatja a másik ajtót. Érdemes-e váltani? Válaszodat indokold!

A pluszpontos feladatok beadási határideje: 2010. március 21.