Stabilitá dell'equilibrio superiore del pendolo

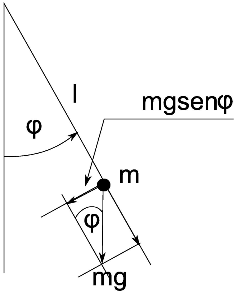
Laszlo Csizmadia

Istituto Bolyai, Universitá di Szeged

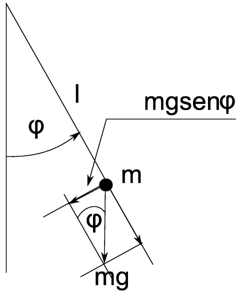
Attivitá di ricerca svolta in collaborazione con il Prof. Laszlo Hatvani

Politecnico di Bari, 03 novembre 2011

Pendolo semplice



Pendolo semplice

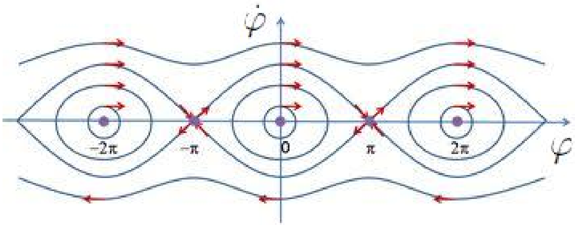


l: la lunghezza di pendolo
g: la costante gravitazionale

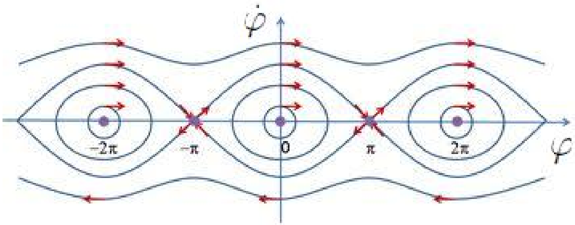
φ: l'angolo tra la direzione verticale e il filo del pendolo

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \quad \rightsquigarrow \quad l\ddot{\varphi} = -g\varphi$$

Equilibri

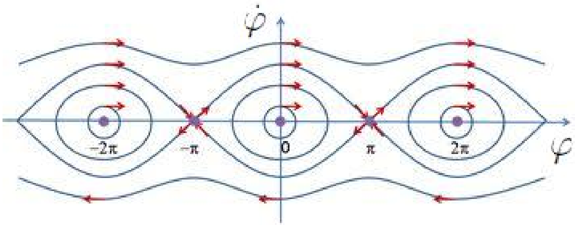


Equilibri



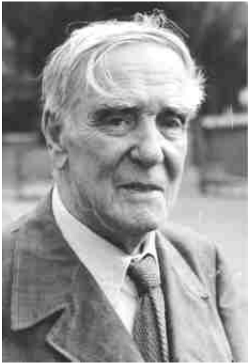
- $(\varphi, \dot\varphi) = (0, 0)$ - stabile

Equilibri



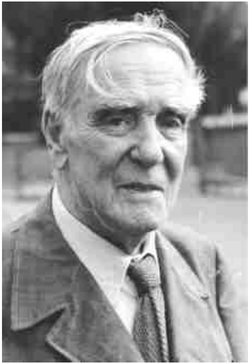
- $(\varphi, \dot{\varphi}) = (0, 0)$ - stabile
- $(\varphi, \dot{\varphi}) = (\pi, 0)$ - instabile

Pyotr Leonidovich Kapitsa, 1894-1984



Premio Nobel, Fisica, 1978.

Pyotr Leonidovich Kapitsa, 1894-1984



Premio Nobel, Fisica, 1978.

1911: „L'equilibrio superiore del pendolo é stabile se il punto di sospensione oscilla verticalmente con frequenza abbastanza alta."

L'accelerazione

$$T_1 > 0,\ \ T_2 > 0,\ \ A_1 > 0,\ \ A_2 > g,\ \ A_1 T_1 = A_2 T_2$$

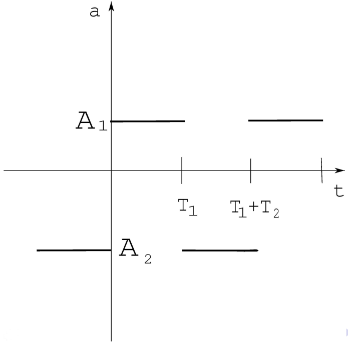
$$a(t) = \begin{cases} \ \ A_1, & \text{se } k(T_1 + T_2) \le t < (k+1)T_1 + kT_2; \\ -A_2, & \text{se } (k+1)T_1 + kT_2 \le t < (k+1)(T_1 + T_2),\ \ k \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

L'accelerazione

$$T_1 > 0,\ \ T_2 > 0,\ \ A_1 > 0,\ \ A_2 > g,\ \ A_1 T_1 = A_2 T_2$$

$$a(t) = \begin{cases} A_1, & \text{se } k(T_1 + T_2) \le t < (k+1)T_1 + kT_2; \\ -A_2, & \text{se } (k+1)T_1 + kT_2 \le t < (k+1)(T_1 + T_2),\ \ k \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Periodo: $\quad T = T_1 + T_2$



L'equazione del moto

$$x = \pi - \varphi \rightsquigarrow \ddot{x} = -\ddot{\varphi}; \;\; \sin x = \sin \varphi$$

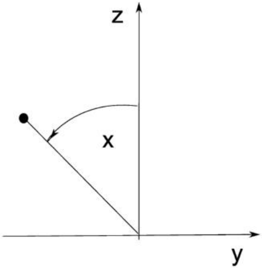
L'equazione del moto

$$x = \pi - \varphi \rightsquigarrow \ddot{x} = -\ddot{\varphi};\ \sin x = \sin \varphi$$

Il modello del pendolo vibrato

$$\ddot{x} - \frac{g + a(t)}{l} x = 0$$

l: la lunghezza del pendolo
g: la costante gravitazionale
x: l'angolo tra la direzione verticale e il filo del pendolo



Obiettivi

- condizione sufficiente a garantire la stabilitá dell'equilibrio superiore

Obiettivi

- condizione sufficiente a garantire la stabilitá dell'equilibrio superiore
- al caso classico $T_1 = T_2, \; A_1 = A_2$

Obiettivi

- condizione sufficiente a garantire la stabilitá dell'equilibrio superiore
- al caso classico $T_1 = T_2, \; A_1 = A_2$
- disegneremo una mappa globale della stabilita

Obiettivi

- condizione sufficiente a garantire la stabilitá dell'equilibrio superiore
- al caso classico $T_1 = T_2, \; A_1 = A_2$
- disegneremo una mappa globale della stabilita
- animazione

Definizioni

$$\dot{x} = A(t)x,\ \ A \in M(2,\mathbb{R}),\ \ A(t+T) = A(t),\ \ \mathrm{Tr\,A} = 0$$

Definizioni

$$\dot{x} = A(t)x, \; A \in M(2, \mathbb{R}), \; A(t+T) = A(t), \; \mathrm{Tr\,A} = 0$$

Definizione

Un sistema lineare, $\dot{x} = A(t)x$*, é detto stabile se tutte le soluzioni sono limitate in* $[0; +\infty)$.

Definizioni

$$\dot{x} = A(t)x,\ A \in M(2,\mathbb{R}),\ A(t+T) = A(t),\ \mathrm{Tr\,A} = 0$$

Definizione

Un sistema lineare, $\dot{x} = A(t)x$, é detto stabile se tutte le soluzioni sono limitate in $[0; +\infty)$.

Definizione

Un sistema lineare é detto stabile forte quando é stabile ed esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'equazione $\dot{x} = B(t)x$ sia stabile supposto che $|B(t) - A(t)| < \varepsilon$ per ogni $t \geq 0$.

Condizione

$X(t)$: matrice fondamentale $X(0) = I, X(T) = C$: matrice di monodromia

Condizione

$X(t)$: matrice fondamentale $X(0) = I, X(T) = C$: matrice di monodromia

Teorema

Una matrice C con $\det C = 1$ *fa ruotare tutti i vettori in* $\mathbb{R}^2$ *di un angolo* $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ *se e solo se il sistema lineare é stabile forte.*

$$\text{Stabilitá forte} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

Condizione

$X(t)$: matrice fondamentale $X(0) = I, X(T) = C$: matrice di monodromia

Teorema

Una matrice C con $\det C = 1$ *fa ruotare tutti i vettori in $\mathbb{R}^2$ di un angolo $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ se e solo se il sistema lineare é stabile forte.*

$$\text{Stabilitá forte} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$\text{In particolare: Stabilitá forte} \quad \Leftrightarrow \quad -\pi < \alpha < 0$$

Spazio delle fasi

$$\ddot{x} - \frac{g + a(t)}{l} x = 0$$

$$a(t) = \begin{cases} A_1, & \text{se } 0 \leq t < T_1; \\ -A_2, & \text{se } T_1 \leq t < T_1 + T_2 = T \end{cases}$$

Spazio delle fasi

$$\ddot{x} - \frac{g + a(t)}{l} x = 0$$

$$a(t) = \begin{cases} A_1, & \text{se } 0 \le t < T_1; \\ -A_2, & \text{se } T_1 \le t < T_1 + T_2 = T \end{cases}$$

$$0 \le t < T_1$$

$$\text{(H)} \qquad \ddot{x} - \frac{g + A_1}{l} x = 0$$

Spazio delle fasi

$$\ddot{x} - \frac{g + a(t)}{l} x = 0$$

$$a(t) = \begin{cases} A_1, & \text{se } 0 \leq t < T_1; \\ -A_2, & \text{se } T_1 \leq t < T_1 + T_2 = T \end{cases}$$

$$0 \leq t < T_1 \qquad\qquad T_1 \leq t < T_1 + T_2$$

$$\text{(H)} \qquad \ddot{x} - \frac{g + A_1}{l} x = 0 \qquad\qquad \text{(E)} \qquad \ddot{x} + \frac{A_2 - g}{l} x = 0$$

Spazio delle fasi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g+A_1}{l}}$$

$$\text{(H)} \qquad \ddot{x} - \omega_1^2 x = 0$$

Spazio delle fasi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g+A_1}{l}}$$

$$\text{(H)} \qquad \ddot{x} - \omega_1^2 x = 0$$

$$y = \frac{\dot{x}}{\omega_1}$$

$$\text{(H)} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \omega_1 y, \\ \dot{y} & = & \omega_1 x \end{array} \right.$$

Spazio delle fasi

$$\omega_1 = \sqrt{\tfrac{g+A_1}{l}} \qquad\qquad \omega_2 = \sqrt{\tfrac{A_2-g}{l}}$$

$$\text{(H)} \qquad \ddot{x} - \omega_1^2 x = 0 \qquad\qquad \text{(E)} \qquad \ddot{x} + \omega_2^2 x = 0$$

$$y = \frac{\dot{x}}{\omega_1} \qquad\qquad y = \frac{\dot{x}}{\omega_2}$$

$$\text{(H)} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x} & = & \omega_1 y, \\ \dot{y} & = & \omega_1 x \end{array} \right. \qquad\qquad \text{(E)} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \dot{x} & = & \omega_2 y, \\ \dot{y} & = & -\omega_2 x \end{array} \right.$$

Spazio delle fasi

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$$

Spazio delle fasi

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi$$

$$0 \le t < T_1 \qquad\qquad T_1 \le t < T_1 + T_2$$

$$(\mathrm{H}) \quad \begin{cases} \dfrac{\dot r}{r} &= \omega_1 \sin 2\varphi \\ \dot\varphi &= \omega_1 \cos 2\varphi \end{cases} \qquad (\mathrm{E}) \quad \begin{cases} \dot r &= 0 \\ \dot\varphi &= -\omega_2 \end{cases}$$

Spazio delle fasi

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi$$

$$0 \le t < T_1 \qquad\qquad T_1 \le t < T_1 + T_2$$

$$(\mathrm{H}) \quad \begin{cases} \dfrac{\dot r}{r} & = & \omega_1 \sin 2\varphi \\ \dot\varphi & = & \omega_1 \cos 2\varphi \end{cases} \qquad (\mathrm{E}) \quad \begin{cases} \dot r & = & 0 \\ \dot\varphi & = & -\omega_2 \end{cases}$$

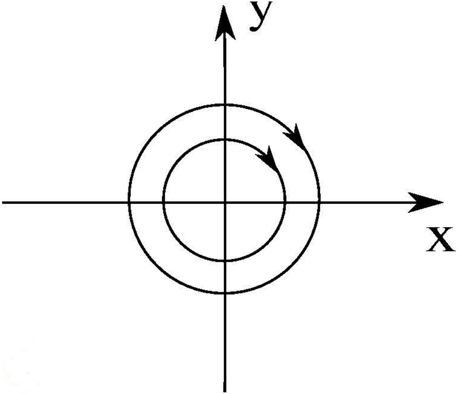
(I.)

Le traiettorie di (E): rotazione in senso orario, velocitá angolare: $-\omega_2$

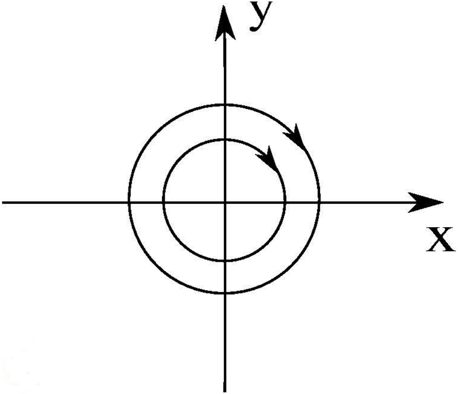
L'angolo:

$$\beta_E = -\omega_2 T_2 \quad (T_1 \le t < T_1 + T_2)$$

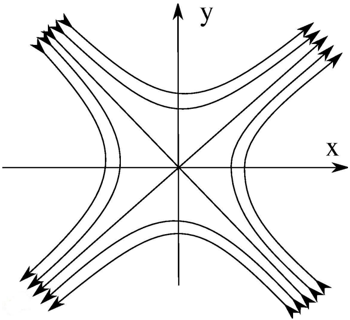
Rotazione ellittica



Rotazione ellittica



Rotazione iperbolica



Spazio delle fasi
(II.)

Fase di flusso di (H): rotazione iperbolica

L'angolo?

$$\dot{\varphi} = \omega_1 \cos 2\varphi$$

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{e^{2\omega_1(t-t_0)} \cdot \dfrac{1+\tan\varphi_0}{1-\tan\varphi_0} - 1}{e^{2\omega_1(t-t_0)} \cdot \dfrac{1+\tan\varphi_0}{1-\tan\varphi_0} + 1}\right)$$

Spazio delle fasi
(II.)

Fase di flusso di (H): rotazione iperbolica

L'angolo?

$$\dot{\varphi} = \omega_1 \cos 2\varphi$$

$$\varphi(t) = \arctan \left(\frac{e^{2\omega_1(t-t_0)} \cdot \dfrac{1+\tan\varphi_0}{1-\tan\varphi_0} - 1}{e^{2\omega_1(t-t_0)} \cdot \dfrac{1+\tan\varphi_0}{1-\tan\varphi_0} + 1} \right)$$

Lemma

Indicando $\beta_H(z;t_0) = \varphi(t_0+T_1) - \varphi(t_0)$ l'angolo di rotazione iperbolica del vettore $z = (x;y)$ in $[t_0;t_0+T_1]$, si ha

$$|\beta_H(z;t_0)| \leq 2\arctan \frac{e^{\omega_1 T_1} - 1}{e^{\omega_1 T_1} + 1} < \frac{\pi}{2} \ .$$

Spazio delle fasi

(III.)

$$0 \leq t < T_1 \qquad\qquad T_1 \leq t < T_1 + T_2$$

(H) $$\ddot{x} - \omega_1^2 x = 0; \; y = \frac{\dot{x}}{\omega_1}$$

(E) $$\ddot{x} + \omega_2^2 x = 0; \; y = \frac{\dot{x}}{\omega_2}$$

Spazio delle fasi

(III.)

$$0 \leq t < T_1 \qquad\qquad T_1 \leq t < T_1 + T_2$$

$$\text{(H)} \qquad \ddot{x} - \omega_1^2 x = 0;\ y = \frac{\dot{x}}{\omega_1} \qquad \text{(E)} \qquad \ddot{x} + \omega_2^2 x = 0;\ y = \frac{\dot{x}}{\omega_2}$$

$$\dot{x} \ \text{ continua in } [0; +\infty) \quad \Rightarrow \quad \omega_1 y(T_1 - 0) = \omega_2 y(T_1 + 0)$$

Spazio delle fasi

(III.)

$$0 \leq t < T_1 \qquad\qquad T_1 \leq t < T_1 + T_2$$

$$(H) \qquad \ddot{x} - \omega_1^2 x = 0; \; y = \frac{\dot{x}}{\omega_1} \qquad (E) \qquad \ddot{x} + \omega_2^2 x = 0; \; y = \frac{\dot{x}}{\omega_2}$$

$$\dot{x} \quad \text{continua in } [0; +\infty) \quad \Rightarrow \quad \omega_1 y(T_1 - 0) = \omega_2 y(T_1 + 0)$$

$$y(T_1) = y(T_1 + 0) = \frac{\omega_1}{\omega_2} y(T_1 - 0);$$

Spazio delle fasi

(III.)

$$0 \leq t < T_1 \qquad\qquad T_1 \leq t < T_1 + T_2$$

$$\text{(H)} \qquad \ddot{x} - \omega_1^2 x = 0;\ y = \frac{\dot{x}}{\omega_1} \qquad \text{(E)} \qquad \ddot{x} + \omega_2^2 x = 0;\ y = \frac{\dot{x}}{\omega_2}$$

$$\dot{x} \quad \text{continua in } [0; +\infty) \quad \Rightarrow \quad \omega_1 y(T_1 - 0) = \omega_2 y(T_1 + 0)$$

$$y(T_1) = y(T_1 + 0) = \frac{\omega_1}{\omega_2} y(T_1 - 0);\ q = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Spazio delle fasi

(III.)

$$0 \leq t < T_1 \qquad\qquad T_1 \leq t < T_1 + T_2$$

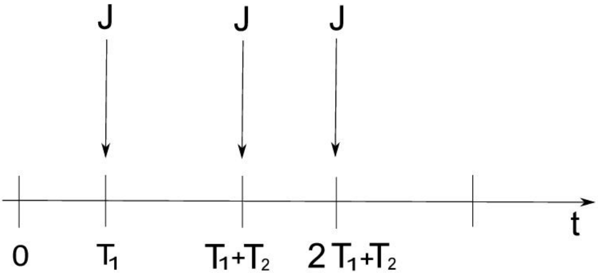
$$\text{(H)} \qquad \ddot{x} - \omega_1^2 x = 0; \; y = \frac{\dot{x}}{\omega_1} \qquad \text{(E)} \qquad \ddot{x} + \omega_2^2 x = 0; \; y = \frac{\dot{x}}{\omega_2}$$

$$\dot{x} \quad \text{continua in } [0; +\infty) \quad \Rightarrow \quad \omega_1 y(T_1 - 0) = \omega_2 y(T_1 + 0)$$

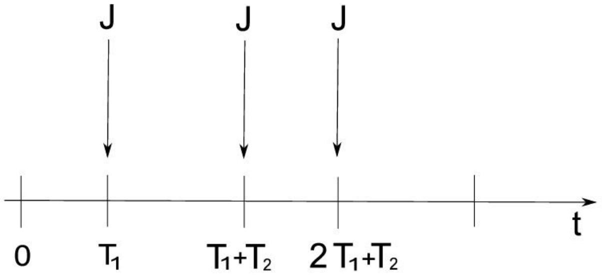
$$y(T_1) = y(T_1 + 0) = \frac{\omega_1}{\omega_2} y(T_1 - 0); \; q = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Contrazione: $q < 1$
Dilatazione: $q > 1$

Salti



Salti



Angolo:

$$|\beta_J| \leq |\arctan \frac{1}{\sqrt{q}} - \arctan \sqrt{q}|$$

Risultato principale

Teorema

Sia $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g + A_1}{l}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{A_2 - g}{l}}$, $q = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \neq 1$, *e*

$$a(t) = \begin{cases} A_1, & \text{se } k(T_1 + T_2) \leq t < (k+1)T_1 + kT_2; \\ -A_2, & \text{se } (k+1)T_1 + kT_2 \leq t < (k+1)(T_1 + T_2), k \in \mathbb{Z}_+ \ . \end{cases}$$

L'equilibrio, $(0,0)$*, dell'equazione del moto,* $\ddot{x} - \dfrac{g + a(t)}{l} x = 0$*, é stabile forte, se:*

- $\omega_2 T_2 < \pi$;
- $2 \arctan \dfrac{e^{\omega_1 T_1} - 1}{e^{\omega_1 T_1} + 1} + 2 \left| \arctan \dfrac{1}{\sqrt{q}} - \arctan \sqrt{q} \right| < \min\{\omega_2 T_2;\ \pi - \omega_2 T_2\}$.

M. Levi and W. Weckesser

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g + A_1}{l}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{A_2 - g}{l}},\ q = \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 1$$

$$A_2 >> g \rightsquigarrow g = 0$$

$$T_1 = T_2,\ A_1 = A_2 \rightsquigarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

M. Levi and W. Weckesser

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g + A_1}{l}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{A_2 - g}{l}},\ q = \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 1$$

$$A_2 >> g \rightsquigarrow g = 0$$

$$T_1 = T_2,\ A_1 = A_2 \rightsquigarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Loro risultato: $\quad -\pi < -\omega \Rightarrow$ Stabilitá forte

M. Levi and W. Weckesser

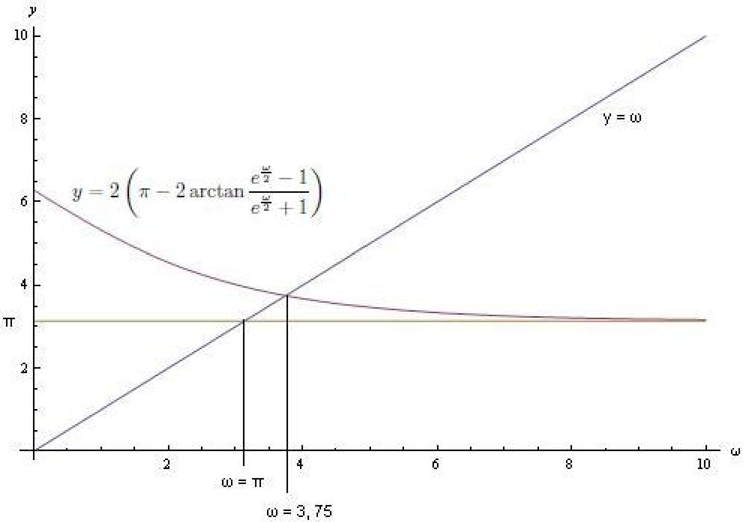
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g + A_1}{l}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{A_2 - g}{l}},\ q = \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 1$$

$$A_2 >> g \rightsquigarrow g = 0$$

$$T_1 = T_2,\ A_1 = A_2 \rightsquigarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Loro risultato: $\quad -\pi < -\omega \Rightarrow$ Stabilitá forte

Nostro risultato: $\quad -\pi < -\frac{\omega}{2} - 2\arctan\frac{e^{\frac{\omega}{2}} - 1}{e^{\frac{\omega}{2}} + 1} \Rightarrow$ Stabilitá forte


y
10
8
6
4
π
2
2
4
6
8
10
ω
y = ω
$y = 2\left(\pi - 2\arctan\frac{e^{\frac{\omega}{2}}-1}{e^{\frac{\omega}{2}}+1}\right)$
ω = π
ω = 3, 75

Arnold V.I.

$$T_1 = T_2;\ A_1 = A_2 = A;\ A >> g, D << l$$

Arnold V.I.

$$T_1 = T_2;\ A_1 = A_2 = A;\ A >> g, D << l$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{D}{l}},\ \mu = \sqrt{\frac{g}{A}};$$

Arnold V.I.

$$T_1 = T_2;\ A_1 = A_2 = A;\ A >> g, D << l$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{D}{l}},\ \mu = \sqrt{\frac{g}{A}};\quad \varepsilon << 1, \mu << 1$$

Arnold V.I.

$$T_1 = T_2;\ A_1 = A_2 = A;\ {\color{red} A >> g, D << l}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{D}{l}},\ \mu = \sqrt{\frac{g}{A}};\quad \varepsilon << 1, \mu << 1$$

$$\text{Risultato di Arnold:}\quad \mu < \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{Stabilitá forte}$$

Arnold V.I.

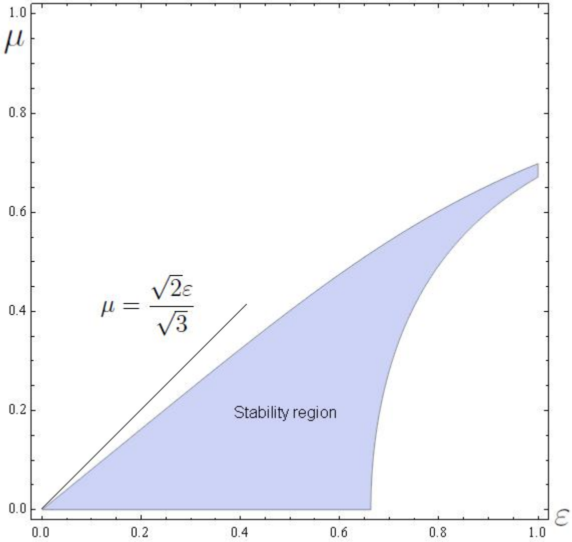
$$T_1 = T_2;\ A_1 = A_2 = A;\ A >> g, D << l$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{D}{l}},\ \mu = \sqrt{\frac{g}{A}};\quad \varepsilon << 1, \mu << 1$$

$$\text{Risultato di Arnold:}\quad \mu < \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{Stabilitá forte}$$

La mappa di stabilitá é vicino all'origine.

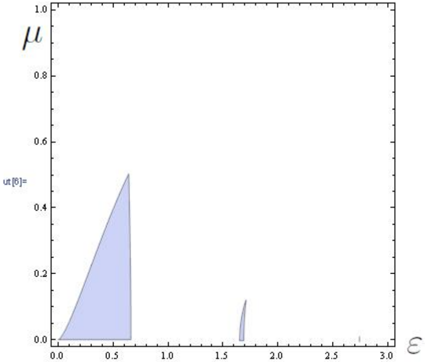
Interpretazione geometrica del risultato di Arnold



Mappa di stabilitá

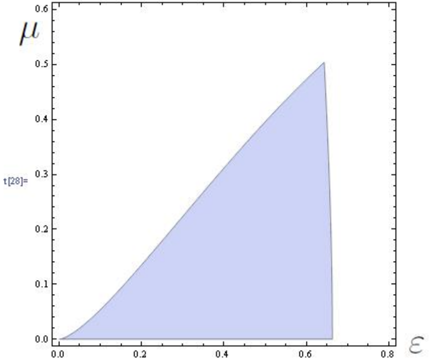
$$A > g \Rightarrow \varepsilon \text{ arbitrario}, \;\; \mu < 1$$

Mappa globale di stabilitá, $0 < \varepsilon < 3$



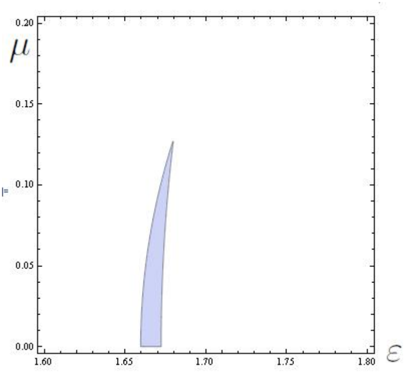
Mappa di stabilitá

$$0 < \varepsilon < 1$$



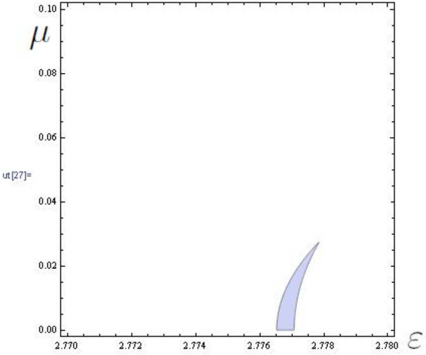
Mappa di stabilitá

$$1 < \varepsilon < 2$$



Mappa di stabilitá

$$2 < \varepsilon < 3$$



Grazie per la Vostra cortese attenzione!