

# Matematika a konyhában. Mértékről és integrálról elemi(bb) módon.

Csizmadia László  
cslaci@math.u-szeged.hu  
www.math.u-szeged.hu

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

Kell egy mennyiség!

# Kell egy mennyiség!

## Kalandozó hadjáratok

# Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg:

# Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg: Merseburg (933), Augsburg (955)

# Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg: Merseburg (933), Augsburg (955)

Az első területszerzés: 1091. Szent László

# Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg: Merseburg (933),  
Augsburg (955)

Az első területszerzés: 1091. Szent László



# Kell egy mennyiség!

Kalandozó hadjáratok - NEM területszerzés a lényeg: Merseburg (933),  
Augsburg (955)

Az első területszerzés: 1091. Szent László





# Terület

# Terület

Természetes elvrásaink:

# Terület

Természetes elvárásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám

# Terület

Természetes elvrásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám
- ha az egész fölbontható egymásba nem nyúló részekre, akkor a részek területösszege az egész összterületével egyezték meg

# Terület

Természetes elvrásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám
- ha az egész fölbontható egymásba nem nyúló részekre, akkor a részek területösszege az egész összterületével egyezzek meg



# Terület

Természetes elvrásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám
- ha az egész fölbontható egymásba nem nyúló részekre, akkor a részek területösszege az egész összterületével egyezzek meg



- egy bennfoglalt rész területe nemnagyobb, mint az ezt tartalmazó rész területe

# Terület

Természetes elvrásaink:

- akárminek a területe egy nemnegatív szám
- ha az egész fölbontható egymásba nem nyúló részekre, akkor a részek területösszege az egész összterületével egyezzek meg



- egy bennfoglalt rész területe nemnagyobb, mint az ezt tartalmazó rész területe
- az egységnyi oldalú négyzet területe 1

# Gyermekkori emlékek



# Gyermekkori emlékek



# Gyermekkori emlékek



# Gyermekkori emlékek



$$T = a \cdot b$$

# A kerek asztal

# A kerek asztal



# A kerek asztal



Vajon mekkora ennek az asztalnak a területe?

# A kerek asztal

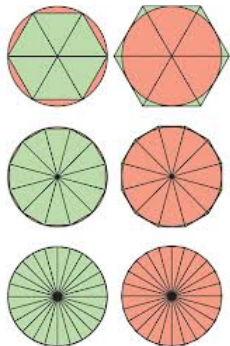


Vajon mekkora ennek az asztalnak a területe? Arkhimédész módszere:

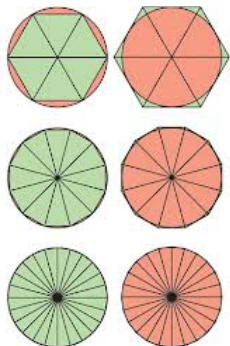
# Végtelen közel



# Végtelen közel



# Végtelen közel



Kívülről is, belülről  
**tetszőlegesen közel**  
kerülünk a kör területéhez a  
köré-, illetve beleírt  
sokszögek területeinek  
segítségével, ha az  
oldalszámot **elegendően**  
**nagyra** választjuk.

# Számsorozat határértéke

# Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az  $r$  sugarú kör köré, illetve bele,

## Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az  $r$  sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

## Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az  $r$  sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolcszöget, tizenhatszöget,  $\dots$ ,

## Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az  $r$  sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolcszöget, tizenhatszöget,  $\dots$ ,  $n$ -szöget írunk kívül is, belül is:

## Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az  $r$  sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolcszöget, tizenhatszöget,  $\dots$ ,  $n$ -szöget írunk kívül is, belül is:

$$T_{\text{kör}} \leq T_k = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{360}{2n}$$



## Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az  $r$  sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolcszöget, tizenhatszöget,  $\dots$ ,  $n$ -szöget írunk kívül is, belül is:

$$T_{\text{kör}} \leq T_k = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{360}{2n}$$

$$T_b = n \cdot r^2 \cdot \cos \frac{360}{2n} \sin \frac{360}{2n} \leq T_{\text{kör}}$$

## Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az  $r$  sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolcszöget, tizenhatszöget,  $\dots$ ,  $n$ -szöget írunk kívül is, belül is:

$$T_{\text{kör}} \leq T_k = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{360}{2n}$$

$$T_b = n \cdot r^2 \cdot \cos \frac{360}{2n} \sin \frac{360}{2n} \leq T_{\text{kör}}$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow n \cdot \tan \frac{360}{2n} \rightarrow \pi$$

## Számsorozat határértéke

Először négyzetet írunk az  $r$  sugarú kör köré, illetve bele, ekkor:

$$2r^2 \leq T_{\text{kör}} \leq 4r^2$$

Aztán nyolcszöget, tizenhatszöget,  $\dots$ ,  $n$ -szöget írunk kívül is, belül is:

$$T_{\text{kör}} \leq T_k = n \cdot r^2 \cdot \tan \frac{360}{2n}$$

$$T_b = n \cdot r^2 \cdot \cos \frac{360}{2n} \sin \frac{360}{2n} \leq T_{\text{kör}}$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow n \cdot \tan \frac{360}{2n} \rightarrow \pi$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow n \cdot \cos \frac{360}{2n} \sin \frac{360}{2n} \rightarrow \pi$$

# Egy antik probléma

# Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

## Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével?

## Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik:

## Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik: a beleírt négyzetet fölfűjjük úgy, hogy végül köréírt legyen belőle



## Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik: a beleírt négyzetet fölfűjjük úgy, hogy végül köréírt legyen belőle lényeges a FOLYTONOSSÁG

## Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik: a beleírt négyzetet fölfűjjük úgy, hogy végül köréírt legyen belőle lényeges a FOLYTONOSSÁG Euklideszi módon NEM szerkeszthető ilyen négyzet

## Egy antik probléma

$$T_{\text{kör}} = r^2 \cdot \pi$$

Lehet-e **euklideszi módszerekkel** olyan négyzetet szerkeszteni, melynek területe megegyezik ez egységsugarú kör területével? Ilyen négyzet létezik: a beleírt négyzetet fölfűjjük úgy, hogy végül köréírt legyen belőle lényeges a FOLYTONOSSÁG Euklideszi módon NEM szerkeszthető ilyen négyzet

a  $\pi$  irracionális, és transzcendens szám

# Palacsintaproblémák

# Palacsintaproblémák



# Palacsintaproblémák



Egy palacsintát kell két egyenlő területű részre vágnunk egy egyenes élű késsel. Lehetséges-e ez?

# Palacsintaproblémák



Egy palacsintát kell két egyenlő területű részre vágnunk egy egyenes élű késsel. Lehetséges-e ez?

Az előző „fölfújjuk” a kört gondolatlanul azonosan: igen, lehetséges.

# Palacsintaproblémák



Egy palacsintát kell két egyenlő területű részre vágnunk egy egyenes élű késsel. Lehetséges-e ez?

Az előző „fölfújjuk” a kört gondolatlanul azonosan: igen, lehetséges.

Lényeges, hogy a kés mozgatása **folytonos**



# Palacsintaproblémák



Egy palacsintát kell két egyenlő területű részre vágnunk egy egyenes élű késsel. Lehetséges-e ez?

Az előző „fölfújjuk” a kört gondolatlanul azonosan: igen, lehetséges.

Lényeges, hogy a kés mozgása **folytonos** azaz **elegendően kicsi** mozdításra **kellően kicsi** szelet jön létre.

# Több palacsinta

## Több palacsinta

Ha több palacsinta fekszik a tányéron, akkor van-e területfelező egyenes vágás?

## Több palacsinta

Ha több palacsinta fekszik a tányéron, akkor van-e területfelező egyenes vágás?



## Több palacsinta

Ha több palacsinta fekszik a tányéron, akkor van-e területfelező egyenes vágás?



Válasz: igen.

## Több palacsinta

Ha több palacsinta fekszik a tányéron, akkor van-e területfelező egyenes vágás?



Válasz: igen. Bizonyítása: Chinn-Steenrod, Bevezetés a topológiába, Gondolat Kiadó, p.107-112.

# Főétel

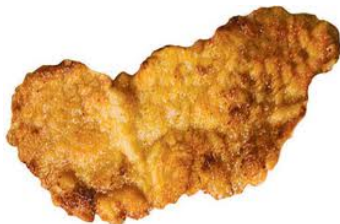
Mekkora a területe egy rántotthúsnak?



Mekkora a területe egy rántothúsnak? rántás előtt



Mekkora a területe egy rántothúsnak? rántás előtt  
rántás (1920.06.04.) után



# Függvénygrafikon alatti terület

# Függvénygrafikon alatti terület

Egyszerűsítünk a problémán: egy függvénygrafikont veszünk.

# Függvénygrafikon alatti terület

Egyszerűsítünk a problémán: egy függvénygrafikont veszünk.  
Arkhimédész módszerét lemásolva bele is és köré is ismert területű  
téglalapokat írunk

# Függvénygrafikon alatti terület

Egyszerűsítünk a problémán: egy függvénygrafikont veszünk.  
Arkhimédész módszerét lemásolva bele is és köré is ismert területű  
téglalapokat írunk  
Riemann-integrál

## Függvénygrafikon alatti terület

Egyszerűsítünk a problémán: egy függvénygrafikont veszünk.  
Arkhimédész módszerét lemásolva bele is és köré is ismert területű  
téglalapokat írunk  
Riemann-integrál  
<http://demonstrations.wolfram.com/RiemannVersusLebesgue/>

# Újra a határérték!!!



## Újra a határérték!!!

Mekkora az  $y = 1/x$  grafikonja alé eső terület, ha  $1 \leq x \leq 2$ ?

## Újra a határérték!!!

Mekkora az  $y = 1/x$  grafikonja alé eső terület, ha  $1 \leq x \leq 2$ ? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

## Újra a határérték!!!

Mekkora az  $y = 1/x$  grafikonja alé eső terület, ha  $1 \leq x \leq 2$ ? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \dots, x_n = q^n = 2 \quad (\text{azaz } q = \sqrt[n]{2})$$

## Újra a határérték!!!

Mekkora az  $y = 1/x$  grafikonja alé eső terület, ha  $1 \leq x \leq 2$ ? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \dots, x_n = q^n = 2 \quad (\text{azaz } q = \sqrt[n]{2})$$

Két szomszédos osztáspont távolsága:  $x_{i+1} - x_i = q^i \cdot (q - 1)$ , és így a téglalapok területösszege

## Újra a határérték!!!

Mekkora az  $y = 1/x$  grafikonja alé eső terület, ha  $1 \leq x \leq 2$ ? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \dots, x_n = q^n = 2 \quad (\text{azaz } q = \sqrt[n]{2})$$

Két szomszédos osztáspont távolsága:  $x_{i+1} - x_i = q^i \cdot (q - 1)$ , és így a téglalapok területösszege

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^i} \cdot q^i \cdot (q - 1) = n \cdot (q - 1) = n \cdot (\sqrt[n]{2}) - 1$$

## Újra a határérték!!!

Mekkora az  $y = 1/x$  grafikonja alé eső terület, ha  $1 \leq x \leq 2$ ? Elkészítjük a megadott intervallum **egy bosztását**

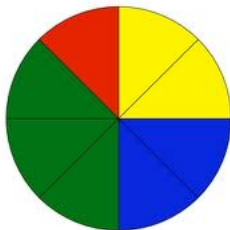
$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \dots, x_n = q^n = 2 \quad (\text{azaz } q = \sqrt[n]{2})$$

Két szomszédos osztáspont távolsága:  $x_{i+1} - x_i = q^i \cdot (q - 1)$ , és így a téglalapok területösszege

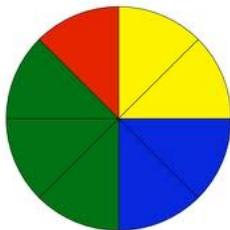
$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^i} \cdot q^i \cdot (q - 1) = n \cdot (q - 1) = n \cdot (\sqrt[n]{2}) - 1$$

Vagyis ismét számsorozat határértékének kiszámítása a feladat.

# Ez is terület



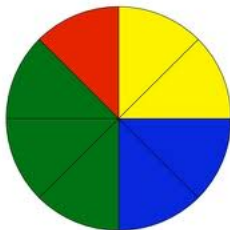
## Ez is terület



Mekkora eséllyel kapunk pirosat (zöldet)?



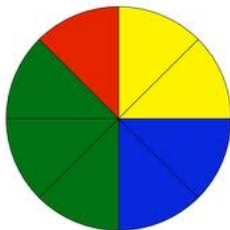
## Ez is terület



Mekkora eséllyel kapunk pirosat (zöldet)?

**Arányba** kell állítani az egész körlap és a kívánt rész területei mérőszámát:

## Ez is terület

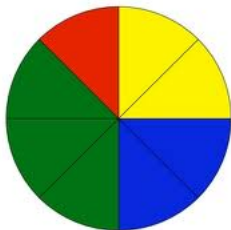


Mekkora eséllyel kapunk pirosat (zöldet)?

**Arányba** kell állítani az egész körlap és a kívánt rész területei mérőszámát:

Piros:  $1/8$ -ad **valószínűséggel**, (zöld:  $3/8$ ),

## Ez is terület



Mekkora eséllyel kapunk pirosat (zöldet)?

**Arányba** kell állítani az egész körlap és a kívánt rész területei mérőszámát:

Piros:  $1/8$ -ad **valószínűséggel**, (zöld:  $3/8$ ), föltételezzük, hogy a körlap semelyik része nincs kitüntetve a többihez képest!!!

# Ez is terület?

Szerencsés és boldor  
személyek

**29.**  
HET

Hónap:  
1989.  
júl. 28.

1989.  
29.  
HET

Alviss

**A fogadónál marad!**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	X	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	X	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	X	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	X	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	X	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Árka az fogadónál, az 20 000 leosztott nagyjából megosztott 0,5 és 0,5 millió forinttal, melynek a határára kizárólagosan a Veszprémi Hét. Ha a határ Népszabadság újságban a szociálisakhoz nem tartozik, a szociálisok között hetente az 12-13 millió forint kell megosztani.

# Ez is terület?

**A fogadónál marad!**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	X	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	X	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	X	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	X	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	X	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

29. HET  
Hónap: 1989. júl. 28.  
vázlatos számtár

29. hét

Arany

Amik a fogadónál, az 20 000 leosztott nagyjából megközelítően 10-15 millió forint közötti összegű nyereményt nyertek meg. A nyeremények a Magyarországi Állami Lottószervezetnél vannak elhelyezve. A nyeremények kifizetése a Magyarországi Állami Lottószervezetnél történik.

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón?

# Ez is terület?



Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón?  
Számhalmazok „területét” kellene összehasonlítani.

# Ez is terület?



Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón? Számhalmazok „területét” kellene összehasonlítani. „Mérjük” a számhalmazokat az elemeik számával!

# Ez is terület?

**A fogadónál marad!**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	X	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	X	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	X	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	X	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	X	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

29. HET  
Hónap: 1989. júl. 28.  
vákuum szelvény

29. hét

Arany

Amik a fogadónál, az 20 000 leosztású nagyjelű nyeremény 0,1 ml. ezüst- vagy arany-éremmel, a háziasszonyoké a Veszprémi Helyi, illetve a helyi Népszabadság újságban való megjelenésüké. A nyereményt követő hét munkanapon belül kell igénybevenni.

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón?

Számhalmazok „területét” kellene összehasonlítani. „Mérjük” a számhalmazokat az elemeik számával!

Az „összterület” az a szám, ahányféleképpen kitölthető az ötöslottó



# Ez is terület?

29. HET

Hétfő  
1989. júli. 28.

29. hét

A fogadónál marad!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	X	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	X	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	X	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	X	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	X	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Állam

Amik a fogadónál, az 20 000 forintnál nagyobb összegű nyereményt ér el, annak költségvetési célra történő felosztásáról a Magyar Köztársaság Vésztési Bizottsága dönt. A Magyar Köztársaság Népességbizottságának feladata a nyeremények felosztásának, a nyeremények kifizetésének, az 12. osztályú nyeremények kifizetésének felügyelése.

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón?

Számhalmazok „területét” kellene összehasonlítani. „Mérjük” a számhalmazokat az elemeik számával!

Az „összterület” az a szám, ahányféleképpen kitölthető az ötöslottó

$$\binom{90}{5}$$

# Ez is terület?

A fogadónál marad!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	X	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	X	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	X	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	X	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	X	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

29. HET  
Hónap: 1989. júl. 28.  
vázlatos számtár

29. hét

Attól

Amik a fogadónál, az 20 000 forintnyi nagyságú nyereményt ér el, annak értékesítését követően a határidő lejárta után a Visszatérítési Alapból, illetve a helyi Népszabadság újságban a nyereményekről tájékoztató, a visszavételre kérték betéteket, az 12. díjig érkező betétekéig.

Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón?

Számhalmazok „területét” kellene összehasonlítani. „Mérjük” a számhalmazokat az elemeik számával!

Az „összterület” az a szám, ahányféleképpen kitölthető az ötöslottó

$$\binom{90}{5}$$

a várva-várt esemény „területe” pedig 1,

# Ez is terület?



Mekkora esélye van a háziasszonynak egy telitalálatosra az ötöslottón? Számhalmazok „területét” kellene összehasonlítani. „Mérjük” a számhalmazokat az elemeik számával!

Az „összterület” az a szám, ahányféleképpen kitölthető az ötöslottó

$$\binom{90}{5}$$

a várva-várt esemény „területe” pedig 1, így az esély igen csekély:

$$1/\binom{90}{5} = 0,0000000227$$

# Feketeleves

# Feketeleves

Baj van!

# Feketeleves

Baj van!

Mekkora a  $(0, 1)$ -be eső racionális számok halmazának „területe”?

# Feketeleves

Baj van!

Mekkora a  $(0, 1)$ -be eső racionális számok halmazának „területe”?  
Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp,  
ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek  
összhosszát ( $\geq$  keresett méret)

# Feketeleves

Baj van!

Mekkora a  $(0, 1)$ -be eső racionális számok halmazának „területe”?

Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ( $\geq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet



# Feketeleves

Baj van!

Mekkora a  $(0, 1)$ -be eső racionális számok halmazának „területe”?

Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ( $\geq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;

# Feketeleves

Baj van!

Mekkora a  $(0, 1)$ -be eső racionális számok halmazának „területe”?

Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ( $\geq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;

rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ( $\leq$  keresett méret)

# Feketeleves

Baj van!

Mekkora a  $(0, 1)$ -be eső racionális számok halmazának „területe”?

Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ( $\geq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül választjuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;

rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ( $\leq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül választjuk a legnagyobbat

# Feketeleves

Baj van!

Mekkora a  $(0, 1)$ -be eső racionális számok halmazának „területe”?

Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ( $\geq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül választjuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;

rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ( $\leq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül választjuk a legnagyobbat Jordan-féle belső mérték

# Feketeleves

Baj van!

Mekkora a  $(0, 1)$ -be eső racionális számok halmazának „területe”?

Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ( $\geq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;

rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ( $\leq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül választuk a legnagyobbat Jordan-féle belső mérték

Ha a kétféle mérték egyenlő, akkor az lesz a keresett érték (Jordan-mérték).

Baj van!

Mekkora a  $(0, 1)$ -be eső racionális számok halmazának „területe”?

Emilé Jordan: fedjük le **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki a lefedő részek összhosszát ( $\geq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül válasszuk a legkisebbet Jordan-féle külső mérték;

rakjuk ki belülről **véges sok** intervallummal annyiféleképp, ahányféleképp csak tudjuk, és mindig számoljuk ki az összhosszúságot ( $\leq$  keresett méret) ez sok-sok szám, amelyek közül választuk a legnagyobbat Jordan-féle belső mérték

Ha a kétféle mérték egyenlő, akkor az lesz a keresett érték (Jordan-mérték). A függvénygrafikon alatti területet (Rieman-integrál) ugyanilyen módon kaptuk. Üres halmaz Jordan-mértéke 0.

Lássuk hát!

$$H = \{x \mid x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Lássuk hát!

$$H = \{x \mid x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke:



Lássuk hát!

$$H = \{x \mid x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Lássuk hát!

$$H = \{x \mid x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Belső-mértéke:

Lássuk hát!

$$H = \{x \mid x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Belső-mértéke: HAJJAJ! Bezzeg, ha tavaly lettünk volna a Kutatók éjszakáján!

Lássuk hát!

$$H = \{x \mid x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Belső-mértéke: HAJJAJ! Bezzeg, ha tavaly lettünk volna a Kutatók éjszakáján! Minden racionális szám között van irracionális, azaz a  $H$  halmazt belülről nem tudjuk lefedni **VÉGES SOK** olyan intervallummal, hogy azok CSAK racionális számot tartalmazzanak

Lássuk hát!

$$H = \{x \mid x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Belső-mértéke: HAJJAJ! Bezzeg, ha tavaly lettünk volna a Kutatók éjszakáján! Minden racionális szám között van irracionális, azaz a  $H$  halmazt belülről nem tudjuk lefedni **VÉGES SOK** olyan intervallummal, hogy azok CSAK racionális számot tartalmazzanak a belső-mérték 0, vagyis nem tudjuk megadni a választ. Hacsak...!

Lássuk hát!

$$H = \{x \mid x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$$

Külső-mértéke: 1

Belső-mértéke: HAJJAJ! Bezzeg, ha tavaly lettünk volna a Kutatók éjszakáján! Minden racionális szám között van irracionális, azaz a  $H$  halmazt belülről nem tudjuk lefedni **VÉGES SOK** olyan intervallummal, hogy azok CSAK racionális számot tartalmazzanak a belső-mérték 0, vagyis nem tudjuk megadni a választ. Hacsak...! Jövőre is lesz Kutatók éjszakája.

Köszönöm a figyelmet!