

## Kalkulus közgazdászoknak gyakorlat

### Kiadott feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények derivált függvényeit.

a.

$$f(x) = (4 - 3x)(5 + 6x);$$

b.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} \sqrt[3]{x}};$$

c.

$$f(x) = \ln \sqrt{\cos x};$$

d.

$$f(x) = \sin \ln x;$$

e.

$$f(x) = \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x};$$

f.

$$f(x) = x^{\tan x};$$

g.

$$f(x) = (\ln x)^{\ln x};$$

h.

$$f(x) = \sqrt[x]{x}.$$

2. Határozza meg az  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  függvény grafikonjának  $x = 2$  abszcisszájú pontjához húzott érintő egyenletét.

3. Az  $f(x) = \ln \tan x$  függvény görbét az  $x = \frac{\pi}{4}$  abszcisszájú pontban egy olyan parabola érinti, amelynek tengelye az  $y$  tengelyen van. Írja föl a parabola egyenletét.

4. Legyen  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sin x$ . Írja föl az  $f + g$  függvény érintőjét a  $\frac{\pi}{4}$  abszcisszájú pontban.

5. Egy ingatlanügynökség lakásokat épít. Elkészül száz lakás, és valamennyit bérbe adnak. (A százlakásos egységen belül mindegyik bérleti díj azonos.) Azt tapasztalják, hogy ha a bérleti díj havi 160000 forint, akkor minden lakásra jelentkezik bérlő. Ha a bérleti díjat 5000 Ft-tal megemelik, akkor két lakás már üresen marad, és minden 5000 forintnyi emelés újabb két üres lakást von maga után. Mennyi legyen a bérleti díj, hogy az ügynökség havé bevétele maximális legyen ezen a százlakásos bérbeadáson?

6. Egy kábeltelevíziós társaságnál jelenleg 3500 előfizető van, az évi előfizetési díj 25000 Ft. A legutóbbi felmérésük szerint minden egyes 1000 forintos díjsökkentés 300 új előfizetőt hozhat. Mennyi legyen az új előfizetési díj, hogy a szolgáltató bevétele maximális legyen?

7. Egy gépkocsi fogyasztása  $f(v) = \frac{1}{12000}v^3 - \frac{3}{200}v^2 + \frac{4}{5}v$  függvény segítségével írható le. (A  $(v)$  sebességet kilométer/órában mérve  $f$  a fogyasztást literekben adja meg.)

a. Állapítsa meg, hogy mekkora sebesség mellett a legkevésbé gazdaságos a jármű használata.

b. Milyen sebességgel a leggazdaságosabb az autó használata egy hosszabb úton?

c. Mekkora ekkor a fogyasztás?

8. Vizsgáljuk a következő függvényeket:

a.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 9};$$

b.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1};$$

c.

$$\log_{\frac{1}{2}} (|x + 5| - |x - 2| - |x + 1|).$$

9. Írja föl az  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 27$  függvény inflexiós pontjába húzott érintőjének egyenletét.

10. Egy derékszögű négyszög kerülete  $2c$ . Mekkora válasszuk az oldalait, hogy területe maximális legyen?

11. Tegyük föl, hogy egy termék kg-ban kifejezett kereslete és  $p$  Ft-os egységára között az

$$f(p) = -2p + 180$$

összefüggés áll fenn.

a. Hány Ft-os egységár mellett lenne az árbevétel maximális, és hány Ft ez a maximum?

b. Mekkora kereslet tartozik ehhez az egységárhoz?

12. Számítsuk ki az alábbi függvények első, második és harmadik deriváltjait:

a.

$$f(x) = e^{-x^2};$$

b.

$$f(x) = \frac{1}{1+x};$$

c.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x^2}{2}};$$

d.

$$f(x) = e^x \cos x.$$

13. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

polinomfüggvény együtthatói kifejezhetőek a függvény deriváltjai segítségével, mégpedig a következőképpen:

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$