

Kalkulus közgazdászoknak gyakorlat

Kiadott feladatok

1. Az „Örökzöld” Faiskolában 7000 fenyőfa van. Évente kivágják a fák 12%-át, ugyanakkor 600 új fenyőt is ültetnek. A főkertész úgy látja, hogy ez egy jó gondolat, és így soha nem fogy el a fa. A kertészet könyvelője viszont aggódik, szerinte ebből előbb-utóbb probléma lesz, és elfognak a fenyők. Kinek volt igaza?

2. Kovács úr autót szeretne vásárolni, ezért takarékoskodik. Minden év elején betesz a bankba ugyanakkora összeget. A bank egyéves lekötés esetén 10% kamatot ad. Legalább mekkora volt az évente betett összeg, ha a 6. év végén (tőkésítés után) már meg tudott venni egy 3100000 Ft-os autót? A választ ezer forintokban adja meg.

3. Vázolja az $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ függvény grafikonját és igazolja a definíció alapján, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}.$$

4. Ábrázolja az

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$$

függvény grafikonját és igazolja a definíció alapján, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4.$$

5. Igazolja:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} = 0.$$

6. Igazolja, hogy az $f(x) = |x|$ függvény az $x_0 = 0$ helyen folytonos.

7. Mutassa meg, hogy

a.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a.$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

8. Legyen:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & , \text{ha } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & , \text{ha } x \in \mathbf{Q}^*. \end{cases}$$

Igazolja, hogy

a.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0;$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

9. Legyen:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & , \text{ha } x = \frac{p}{q}, 0 < q, (p; q) = 1 \\ 0 & , \text{ha } x \in \mathbf{Q}^* \text{ vagy } x = 0. \end{cases}$$

Igazolja, hogy $f(x)$ -nek mindenütt van határértéke, valamint hogy az irracionális helyeken és 0-ban folytonos.

10. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

a.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - 2x + 1};$$

b. $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

11. Határozza meg az alábbi határértékeket:

a.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 1}{2x^2 - x + 1};$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{x - 1}.$$

12. Adja meg a következő határértékeket:

a.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x};$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

13. Vizsgálja meg a következő függvények folytonosságát:

a.

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & , \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ha } x = 0; \end{cases}$$

b.

$$f(x) = \frac{3}{x - 1};$$

c.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ha } x \in \mathbf{Z} \\ 0 & , \text{ha } x \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$$

14. Igaz-e, hogy egyetlen vágással bármely palacsinta megfelezhető? Igaz-e , ha egyetlen vágással két „diszjunkt” palacsintát akarunk megfelezni?
15. Igaz-e, hogy bármely páratlan fokú, valós együtthatós egyenletnek létezik valós megoldása?
16. Legyen f folytonos, g szakadós (nem folytonos) függvény. Mit lehet mondani az $f + g$ és az $f \cdot g$ függvények folytonosságáról?