Bevezetés az analízisbe

Előadás vázlat.
2009. ősz

3. előadás

Téma: Függvények határértéke, folytonossága. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.

1. Definíció. *(A folytonosság Cauchy-féle definíciója)*
Legyen $f(x)$ értelmezve az a pont valamely környezetében. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ folytonos az a helyen, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon; a)$: $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Ezzel ekvivalens a következő, ún. Heine-definíció:

2. Definíció. *Legyen $f(x)$ értelmezve az a pont valamely környezetében. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ folytonos az a helyen, ha $\forall x_n \in \mathcal{D}_f$ esetén $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.*

3. Tétel. *A két definíció ekvivalens.*

Bizonyítás.

Legyen $f(x)$ az a pontban folytonos az első definíció szerint, és legyen $x_n \to a$ ($x_n \in \mathcal{D}_f$). Ekkor $f(x_n) \to f(a)$, hiszen $\forall \varepsilon > 0$ esetén elegendően nagy n-re $|f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon$, mert elegendően nagy n-re a sorozat az a ε-környezetébe esik az első definíció alapján.

A másik irány bizonyításához tegyük föl, hogy az $f(x)$ az a pontban az első definíció szerint NEM folytonos: $\exists \varepsilon_0 > 0$, amelyhez nincsen megfelelően kicsi környezete a-nak, azaz a bármely környezetében van a $\mathcal{D}_f$-nek olyan x pontja, hogy $|f(x) - f(a)| > \varepsilon_0$. Így az a pont $\frac{1}{n}$-környezetében $\exists x_n \in \mathcal{D}_f$ PONT, hogy $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon_0 (n = 1, 2, \dots)$. Ekkor $x_n \to a$, ám $f(x_n) \nrightarrow f(a)$. Van olyan a-hoz tartó sorozat tehát, hogy a megfelelő függvényértékek sorozata nem tart $f(a)$-ba.

■

Gondoljuk meg a következőt: ha egy függvény egyetlen pont kivételével mindenütt értelmezett, és „közel" kerülünk ehhez az említett ponthoz, akkor tudunk-e, és ha igen akkor mit tudunk mondani a megfelelő függvényértékekről (azok sorozatáról)? Ebben segít a következő definíció.

4. Definíció. *Legyen $f(x)$ értelmezve az a hely valamely környezetében, kivéve esetleg magát az a-t. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik a határértéke az a helyen, és ez az A szám, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ez a határérték Cauchy-típusú definícija. Várható, hogy van Heine-féle is. Íme.

5. Definíció. *Legyen $f(x)$ értelmezve az a hely valamely környezetében, kivéve esetleg magát az a-t. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik a határértéke az a helyen, és ez az A szám, ha*

$$\forall x_n \in \mathcal{D}_f : x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A.$$

Fönti szituációt $\lim_{x\to a} f(x) = A$ jelöli.

Most is igaz, hogy

6. Tétel. *A két definíció ekvivalens.*

Bizonyítás. A folytonosságnál látott bizonyítás adaptálásával megmutatható.

■

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt tekintve látható, hogy ha közel vagyunk a zéróhoz, akkor a függvényérték nagyon nagy. Ez motiválja a következőt.

7. Definíció. *Legyen f értelmezve az x_0 valamely környezetében, kivéve esetleg magát az x_0-t. Az f határértéke az x_0-ban ∞ ($-\infty$), ha $\forall K$ számhoz $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ maga után vonja, hogy $K < f(x)$ ($f(x) < K$). Ezt* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ *jelöli.*

Ugyanezen függvénynél érezzük, hogy ha x-et minden határon túl növeljük, akkor a függvényértékek egyre jobban megközelítik a nullát.

8. Definíció. *Legyen $f : (a; \infty) \to \mathbb{R}$. Az f határértéke a ∞-ben A, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists K$ úgy, hogy $K < x$ maga után vonja, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése:* $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$.

Fantáziánk azt diktálja, hogy lennie kell még legalább egy esetnek. Ez így is van:

9. Definíció. *Legyen $f : (a; \infty) \to \mathbb{R}$. Az f határértéke a ∞-ben ∞ ($-\infty$), ha $\forall P$-hez $\exists K$ úgy, hogy ha $K < x$, akkor $P < f(x)$ ($f(x) < K$).*

Tekintsük példaként a következő feladatot:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x.$$

Ezt nem tudjuk megválaszolni, hiszen nem mindegy, hogy a $\frac{\pi}{2}$ melyik oldali környezetét tekintjük, másképpen fogalmazva, hogy a $\frac{\pi}{2}$-höz melyik irányból tartatjuk az x-et. A problémát föloldhatjuk a következő fogalom bevezetésével.

10. Definíció. *Legyen $f : (a; b) \to \mathbb{R}$. Az f jobboldali határértéke létezik az a helyen és értéke A, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.*

Hasonlóan értelmezhető a véges helyen bal oldali véges határérték.

11. Definíció. *Legyen $f : (a; b) \to \mathbb{R}$. Az f jobboldali határértéke az a helyen ∞, ha $\forall P$ számhoz $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $0 < x - a < \delta$ esetén $P < f(x)$.*

Hasonlóan értelmezhető a véges helyen bal oldali végtelen határérték.

A féloldali határérték mintájára a féloldali folytonosság is bevezethető.

12. Definíció. *Legyen $f : [a; b) \to \mathbb{R}$. Az f függvény folytonos jobbról az a helyen, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : 0 \leq x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

13. Definíció. *Legyen $f : (a; b] \to \mathbb{R}$. Az f függvény folytonos balról a b helyen, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : 0 \leq b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon.$$

14. Definíció.

- $$f \in C_(a; b) \Leftrightarrow f \in C_{x_0}, \forall x_0 \in (a; b);$$
- $$f \in C_{[a;b]} \Leftrightarrow f \in C_{x_0}, \forall x_0 \in (a; b), \text{ továbbá } a\text{-ban jobbról, } b\text{-ben balról folytonos.}$$

15. Állítás. *Valamely f függvény pontosan akkor folytonos az $x_0 \in \mathcal{D}_f$ helyen, ha ott balról is és jobbról is folytonos.*

A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Egy érdekes példa a Riemann-függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* \\ \frac{1}{q,} & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \; p, q \in \mathbb{Z}, 0 < q, (p; q) = 1. \end{cases}$$

Ennek a függvénynek minden értelmezési tartományába eső helyen létezik a határértéke, ami zéró (holott a függvény nem az azonosan nulla függvény), minden irracionális helyen folytonos és egyetlen racionális helyen sem folytonos. Próbálja meg az olvasó belátni a Riemann-függvény fölsorolt tulajdonságait.

Egy másik hasznos feladat, ha a Tisztelt Olvasó az összes eddigi Cauchy-típusú definíciót megfogalmazza Heine-típusúként is.

Feladatmegoldás szempontjából alapvető a következő

16. Lemma.

$$f \in C_{x_0} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

A bizonyítást itt is mellőzzük.

Fölmerülhet a kérdés bárkiben, hogy a határértékképzés és a függvények közötti műveletek miként viszonyulnak egymáshoz, illetve, hogy a folytonos függvények osztálya mely műveletekre zárt?
Ezekről szólnak a következő tételek. (Jelen vázlatban csak a folytonosság és a műveletek kapcsolatáról írunk. A határértékre a tétel igen egyszerűen átvihető.)

17. Tétel. $f, g \in C_a, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$

- $\lambda f + \mu g \in C_a$;
- $f \cdot g \in C_a$;
- *ha* $g(a) \neq 0$*, akkor* $\frac{f}{g} \in C_a$.

Bizonyítás.

A folytonosság Heine-féle definíciója alapján, ha az $x_n \to a$ tetszőleges sorozat, akkor $f(x_n) \to f(a),\ g(x_n) \to g(a)$. A sorozatok limeszképzésének linearitására vonatkozó tétel alapján az első és második állítás magától értetődik.

Ha $g(a) \neq 0$, akkor tfh. $0 < g(a)$. A folytonosság miatt $\exists \delta_0 :\ |x - a| < \delta_0$ esetén $\frac{g(a)}{2} < g(x) < \frac{3g(a)}{2}$, azaz $g(x) \neq 0$ ebben a δ_0-környezetben, továbbá igaz az is, hogy

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)}.$$

■

18. Tétel.

$$g(x) \in C_a,\ f(x) \in C_{g(a)} \Rightarrow f \circ g \equiv f(g(x)) \in C_a$$

Bizonyítás.

Legyen $x_n \to a$. Ekkor $y_n := g(x_n) \to g(a) =: y_0$, továbbá $f(y_n) = f(g(x_n)) \to f(g(a)) = f(y_0)$.

■

Ha az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt tekintjük például az $[1;2]$ intervallumon, illetve a $(0;1)$ intervallumon, akkor sok érdekességet megfigyelhetünk.

19. Tétel.

$$f \in C_{[a;b]} \Rightarrow \exists K: \ |f| \leq K$$

Bizonyítás.

Indirekt módon tfh. f nem korlátos az $[a;b]$ intervallumon. Ekkor semmilyen K számra nem teljesülhet, hogy:

$$|f(x)| \leq K \ \forall x \in [a;b].$$

Tehát minden n-hez van olyan $x_n \in [a;b]$, melyre $|f(x_n)| > n$.

Tekintsük az x_n sorozatot, mely keletkezése folytán korlátos, így van konvergens részsorozata, és legyen: $\alpha := \lim_{k\to\infty} x_{nk}$.

$\alpha \in [a;b]$, hiszen a sorozat minden tagja innen származik, továbbá mivel $f \in C_\alpha$, ezért $f(x_{nk}) \to f(\alpha)$, tehát az $f(x_{nk})$ sorozat korlátos, ami ellentmond annak, hogy $|f(x_{nk})| > n_k$ $\forall k$-ra. Tehát a függvény korlátos az $[a;b]$ intervallumban.

■

Vizsgálja meg a Tisztelt Olvasó, hogy nem korlátos, illetve nem zárt intervallumon folytonos függvényről biztosan elmondhtaja-e, hogy korlátos.

20. Tétel.

$$f \in C_{[a;b]} \Rightarrow \exists \min_{[a;b]} f(x), \ \max_{[a;b]} f(x)$$

Bizonyítás.

Előző tételünk alapján $\exists \sup f([a,b])$, jelölje ezt M, megmutatjuk, hogy $M \in f([a,b])$.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $M - \frac{1}{n}$ nem fölső korlátja $f([a,b])$-nek M értelmezése miatt. Tehát van olyan $x_n \in [a;b]$ pont, melyre $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Tekintve az x_n sorozatot az korlátos , így létezik konvergens részsorozata, legyen tehát $\alpha := \lim_{k\to\infty} x_{nk}$, $\alpha \in [a;b]$.

Mivel $f \in C_\alpha$, ezért $f(x_{nk}) \to f(\alpha)$. Tekintettel, hogy

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{nk}) \leq M \ \forall k,$$

ezért a rendőrelv miatt:

$$M \leq f(\alpha) \leq M,$$

vagyis $f(\alpha) = M$. Így készen vagyunk.

$\blacksquare$

A minimum létezése hasonlóan bizonyítható.

21. Tétel. *(Bolzano-Darboux)*

Ha $f \in C_{[a;b]}$, akkor f az $[a;b]$ intervallumban fölvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket.

Bizonyítás.

Tfh. $f(a) < c < f(b)$, és legyen $A := \{x \in [a;b] : \ f(x) < c\}$.

$A \neq \emptyset$ és korlátos, így $\exists \sup A =: \alpha$, ahol $\alpha \in [a;b]$.

Mivel f folytonos a-ban, és $f(a) < c$, ezért alkalmas δ-ra az $[a; a+\delta)$ intervallumban $f(x) < c$, azaz $a < \alpha$. Hasonló módon a b-beli folytonosságból alkalmas $(b-\delta; b]$ intervallumban $c < f(x)$, azaz $\alpha < b$. Megmutatjuk, hogy $f(\alpha) = c$.

Ha $c < f(\alpha)$, akkor $\exists(\alpha - \delta; \alpha + \delta)$ intervallum, hogy ebben $c < f(x)$. Ez viszont azt jelenti, hogy $\alpha \neq \sup A$, ami nyilván ellentmondás.

Ha $f(\alpha) < c$, akkor $\exists(\alpha - \delta; \alpha + \delta)$ intervallum, amelyben $f(x) < c$. Ekkor α megint nem az A fölső határa, mert A-ban vannak α-nál nagyobb x-ek.

$\blacksquare$

22. Következmény. *Ha* $0 \leq a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$*, akkor* $\exists b \geq 0$ *valós szám, hogy:* $b^k = a$.

Bizonyítás.

$f(x) = x^k \in C_{[0;a+1]}$, és mivel $f(0) = 0 \leq a$, valamint $f(a+1) = (a+1)^k \geq a + 1 > a$, ezért a B-D tulajdonságból következik, hogy $\exists b \in [0; a+1]: \ b^k = f(b) = a$.

$\blacksquare$

23. Definíció. *Az* f *függvény egyenletesen folytonos az* I *intervallumban, ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x_0, x_1 \in I : \ |x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Vagyis akármilyen előre adott ε-hoz helytől függetlenül található δ.

24. Tétel. *Ha* $f \in C_{[a;b]}$*, akkor* f *egyenletesen folytonos az* $[a;b]$ *intervallumban.*

Bizonyítás.

Indirekt módon tfh. a függvény nem egyenletesen folytonos, azaz

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x', x'' : \ |x' - x''| < \delta \text{ és } |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

Rögzítsük ε_0-t és tekintsük a $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ értékeket. Ekkor vannak olyan x'_n, x''_n helyek, amelyekre

$$x'_n, x''_n \in [a;b], \ |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \ |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Mivel x'_n sorozat korlátos, így van konvergens részsorozata: $x'_{n_k} \to x_0 \in [a;b]$, továbbá $x''_{n_k} \to x_0$, hiszen $|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$.

Fölhasználva f folytonosságát kapjuk, hogy $f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$ és $f(x''_{n_k}) \to f(x_0)$ valamint a sorozat konstrukciója miatt:

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0,$$

ami ellentmondás.

∎

25. Definíció. *Legyen f értelmezve az a pont egy környezetében, kivéve esetleg magát az a-t, és tfh. f nem folytonos a-ban. Ha $\lim_{x\to a} f(x)$ létezik és véges, és $a \notin \mathcal{D}_f$, avagy $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$, akkor amh. f-nek megszűntethető szakadása van a-ban.*

26. Definíció. *Ha $\lim_{x\to a} f(x)$ nem létezik, és*

$$\lim_{x\to a+0} f(x), \ \lim_{x\to a-0} f(x)$$

léteznek, akkor azt mondjuk, hogy f-nek ugráshelye van a-ban.

Az előzőben definiálttal együtt a kettő esetet elsőfokú szakadási helynek nevezzük, minden más esetben másodfajú szakadásról beszélünk.

Megemlítünk egy nagyon fontos tételt, amely sokat lendített az analízis kutatásán, sőt, a halmazelméletén is.

27. Tétel. *Ha f monoton az I intervallumban, akkor I-ben legföljebb megszámlálható sok szakadása van.*

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt. A bizonyítás megtalálható például a Laczkovich-T.Sós Analízis I. c. jegyzetben.

28. Tétel. *Legyen f szigorúan monoton növekvő (csökkenő) az I intervallumon. Ekkor*

- f^{-1} *szigorúan monoton növekvő (csökkenő) az $f(I)$ intervallumon;*
- f^{-1} *az $f(I)$ minden pontjában folytonos.*

Előbbi tételnek egy olyan változata, amelynek bizonyítása N.Z. „Hafo” jegyzetében megtalálható.

29. Tétel. $f \in C_(a;b)$, *f szigorúan monoton növő,* $\alpha := \inf_{a<x<b} f(x)$, $\beta := \sup_{a<x<b} f(x) \Rightarrow \exists f^{-1} : (\alpha;\beta) \to (a;b)$, *amely monoton növekedő és folytonos az* $(\alpha;\beta)$ *intervallumon.*

Bizonyítás.

Nem bizonyítjuk. Annyit említünk csak, hogy a Bolzano-Darboux tulajdonság az alapja.

■

Fölhívjuk a figyelmet, hogy az inverzfüggvény képzése nem mindig olyan egyszerű. Gondoljuk meg például az $f(x) = \sin x$ függvény invertálhatóságát. Az könnyen kideríthető, hogy az egész értelmezési tartományán nem invertálható, mivel ott nem injektív. Leszűkítve azt a a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ intervallumra már invertálható lesz, és inverzén azt a függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya a $[-1;1]$ intervallum, hozzárendelési szabálya pedig:

$$f(x) = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Kérjuk a Tisztelt Olvasót, hogy önálló munka keretében tegyen szert a további trigonometrikus függvények inverzeinek megismerésére.

Hátramaradt két fontos tétel.

30. Definíció. *Legyen* $a < 0$, $x \in \mathbb{R}$, $(r_n) \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}$ *esetén olyan, hogy :* $r_n \to x$*.Ekkor*

$$a^x := \lim_{r_n \to x} a^{r_n}.$$

31. Tétel. *A definíció jó, azaz* a^{r_n} *konvergens és határértéke bármely* x*-hez tartó* r_n *sorozat esetén* a^x*.*

Bizonyítás.

Legyen $1 < a,\ x_0 \in \mathbb{R},$ és $r_n \to x_0$ racionális tagú rögzített sorozat. Tudjuk, hogy

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leq a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|.$$

Az r_m konvergens, így korlátos: $r_m \leq K$, ahol $0 < K \in \mathbb{Q}$, ekkor

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leq M|a^{r_n - r_m} - 1| \leq M(a^{|r_n - r_m|} - 1),$$

ahol $M := a^K$.

Mivel $\sqrt[n]{a} \to 1,\ n \to \infty$ esetén, így $\exists l \in \mathbb{Z}$:

$$|\sqrt[l]{a} - 1| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Mivel az r_n sorozat konvergens, így a Cauchy-féle belső konvergencia kritérium szerint $\exists \nu :\ \forall n, m > \nu$ esetén

$$|r_n - r_m| < \frac{1}{l}.$$

Írjuk ezt a kitevőbe és használjuk a már ismert monotonitási tulajdonságot:

$$|a^{r_n - r_m} - 1| \leq \frac{\varepsilon}{M},$$

vagyis

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,\ \forall n, m > \nu,$$

vagyis az a^{r_n} egy Cauchy-sorozat, azaz konvergens.

Lássuk, hogy a határérték egyértelmű. Legyenek indirekte $r'_n,\ r''_n$ x_0-ba tartó olyan racionális tagú sorozatok, amelyekre:

$$a^{r'_n} \to \alpha,\ a^{r''_n} \to \beta,\ \text{és } \alpha \neq \beta.$$

Képezzük az $r'_n,\ r''_n$ sorozatok fésűs egyesítését, jelölje azt r_n. Ekkor az a^{r_n} sorozatnak két torlódási pontja van, viszont a föntiekből tudjuk, hogy a^{r_n}

konvergens. Ellentmondáshoz jutottunk, amit csak úgy oldhatunk föl, hogy az egyvesszős és a kétvesszős sorozat esetén ugyanaz a határérték.

■

Az a^x exponenciális függvény tehát minden valós számra értelmezett, $1 < a$ alap esetén monoton növő, $a = 1$ esetén azonosan 1, $0 < a < 1$ esetén monoton csökkenő. A műveleti szabályok az értelmezés miatt nem változnak (épp ez a lényeg, direkt így csináltuk - permanencia elv).

Annyit azért megemlítünk, hogy a műveleti szabályok bizonyítását megéri egyszer megcsinálni.

Az exponenciális függvény inverzének megalkotásához az alapra: $a \neq 1$. Ekkor már vagy növő vagy csökkenő, mindenesetre minkettő esetben létezik az inverz, mely szintén monoton növő, ha $1 < a$ vagy monoton csökkenő, ha $0 < a < 1$. Értelmezési tartománya $(0; \infty)$, hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = \log_a x \in \mathbb{R}.$$

32. Tétel. *Az $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ monoton nő a $(-\infty; -1)$ és $(0; \infty)$ félegyenesek mindegyikén, továbbá*

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

A tétel igazolásához szükségünk van egy kis segítségre, amelyet bizonyítás nélkül közlünk.

33. Lemma. *Legyen $-1 < x$. Ekkor*

$$\text{Ha } 1 \leq b \text{ vagy } b \leq 0, \text{ akkor } 1 + bx \leq (1 + x)^b.$$

$$\text{Ha } 0 \leq b \leq 1, \text{ akkor} (1 + x)^b \leq 1 + bx.$$

Bizonyítás. (A tétel vázlatos bizonyítása.)

Ha $0 < x < y$, akkor $1 < \frac{y}{x}$. A lemmából kapjuk

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{x}} \geq 1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{x},$$

és a hatványfüggvény monotonitásából:

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x .$$

Ha $x < y < -1$, akkor hasonlóan kapjuk, hogy f monoton nő.

A határérték létezik mindkét végtelenben (ez nem trivialitás), amely az e szám definíciója miatt csakis e lehet.

■

Bizonyítást nélkülözve állítjuk a következőt.

34. Tétel. *Tetszőleges* $b \in \mathbb{R}$ *esetén:*

$$\lim \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b.$$