Bevezetés az analízisbe

Előadás vázlat.
2009. ősz

2. előadás

Téma: Sorozatok, korlátosság és monotonitás. Konvergens sorozatok. Egyenlőtlenségtételek. Torlódási pont.

Számos definícióra van szükségünk a kifejtendő tételek miatt, így mindenek előtt azokat közöljük.

1. Definíció. *Valós számsorozaton az $f(n) \equiv a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt értjük.*

Sorozat megadása történhet

- explicite - vagyis amikor fölsoroljuk az elemeit, pl.: $a_n = (1; \frac{1}{2}; \dots; \frac{1}{n}; \dots)$;
- rekurzióval, pl.: $a_1 = 1, a_2 = 1; 2 < n : a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$;
- tulajdonság leírásával, pl.: $a_n = n$. prímszám.

2. Definíció. *Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat részsorozatainak az $\{a_{n_k}\}$ alakú sorozatokat nevezzük, ahol $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ pozitív egészek.*

3. Definíció. *Legyen k és l két indexsorozat úgy, hogy értékkészleteik diszjunkt uniója az $\mathbb{N}$, továbbá (a_i) és (b_j) két sorozat. E kettő fésűs egyesítésén azt a (c_n) sorozatot értjük, amelyre:*

$$c_n := \begin{cases} a_i, & ha\ n = k(i); \\ b_j, & ha\ n = l(j). \end{cases}$$

4. Definíció. *Legyen π az $\mathbb{N}$ permutációja - önmagára való bijektív leképezése, és (a_n) egy sorozat. E sorozat átrendezésén az $(a_{\pi(n)})$ sorozatot értjük.*

Az (a_n) sorozat korlátos, ha értékkészlete korlátos. Ami ezzel ekvivalens az alábbi

5. Definíció. *Az (a_n) sorozat korlátos, ha* $(\exists K \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N}) : |a_n| \leq K$.

Értelemszerűen bevezethető a féloldali korlátosság fogalma is.

6. Definíció. *Az (a_n) sorozat α torlódási pontján értjük azt a számot, amelynek bármely környezetébe a sorozatnak végtelen sok tagja esik.*

Példa.

- $a_n = (-1)^n$, melynek két torldási pontja van: -1 és 1;
- $a_n = \frac{1}{n}$, melynek egyetlen torlódási pontja a 0.

Utóbbi eset, tehát amikor egyetlen olyan szám van, melynek bármilyen kis környezetébe a sorozatnak majdnem minden tagja megtalálható motiválta a következőt. Emlékeztetnénk arra, hogy két, például $a, b \in \mathbb{R}$ elem távolságán az $|a - b|$ kifejezést értjük.

7. Definíció. *Az (a_n) sorozat konvergens és határértéke az A szám, ha*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \nu \in \mathbb{N}) :\ (\forall n > \nu) :\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Fönti helyzetben a következő jelölést használjuk:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

8. Megjegyzés. *Számos ekvivalens definíciót lehet adni egy sorozat konvergenciájára. A definíció előtt leírt tulajdonság is egy ilyen. Természetesen az ekvivalenciát minden esetben bizonyítani kell.*

Vegyük észre, hogy ha egy sorozatnak *véges sok* tagja esik az $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ intervallumon kívül, akkor *végtelen* sok esik bele. Fordítva, ha végtelen sok tag van az intervallum belsejében, akkor *nem szükségképpen* véges sok esik azon kívülre.

Az előző előadásban említettük, hogy az $\mathbb{R}$ szeparábilis (Hausdorff) topologikus tér. Szerencsére. Az alább következő tétel megvilágítja, hogy miért kell ennek örülni.

9. Tétel. *(A határérték unicitása.)*

Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor határértéke egyértelmű.

Bizonyítás.

Indirekt módon tfh. van olyan (a_n) sorozat, amelynek legalább két határértéke létezik: a és $b \neq a$. Vegyük a és b egy-egy olyan környezetét, amelyek nem nyúlnak egymásba - ezek létezését garantálja a Hausdorff-axióma. Legyen ez a $\frac{|a-b|}{2}$ sugarú mind az a, mind a b körül. Mivel a és b határérték, azért valamely tagtól kezdve a sorozat mindkét környezetbe bele kell tartozzék, ami azok diszjunkt volta miatt lehetetlen. Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis föltevésünk hamis. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

■

10. Definíció. *Abban az esetben, ha a sorozat nem konvergens, akkor divergens.*

Fölmerülhet olyan eset, amikor egy sorozat alulról korlátos ugyan, ugyanakkor *minden határon túl nő.*

11. Definíció. *Az (a_n) sorozat határértéke ∞, ha*

$$(\forall K \in \mathbb{R})\ (\exists \nu = \nu(K)) : \ (\forall n > \nu) : \ K < a_n.$$

Ezt a tényt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

jelöli.

A $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ hasonlóan definiálható.

Fontos tény az alábbi.

12. Tétel. *(A konvergencia szükséges föltétele.)*

Konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás.

Legyen az (a_n) sorozat konvergens, és határértéke az A szám. Tekintsük ennek az 1 sugarú környezetét. Ezen intervallumon kívül a sorozatnak legföljebb véges sok tagja van. Vegyük a sorozatnak az $A+1$-nél nagyobb tagjai közül a legnagyobbat(a teljességi axióma miatt ilyen van), ez a sorozat egy fölső korlátja. Ha nincsen az $A+1$-nél nagyobb tag, akkor ő maga egy fölső korlát. Hasonló okoskodással az $A-1$-nél kisebb tagok legkisebbikét (ha ilyen nincs, akkor magát $A-1$-et) véve a sorozat egy alsó korlátjához jutunk.

■

13. Tétel. *(Részsorozatokra vonatkozó tétel.)*

- *Ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$*, akkor bármely részsorozata, bármely átrendezése konvergens, és határérétke az A szám.*
- *Ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$*, akkor bármely részsorozata, bármely átrendezése is* $\pm\infty$*-be tart.*
- *Ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$*, akkor fésűs egyesítésük is konvergens, és határértéke az A szám.*
- *Ha az* a_n *és a* b_n *sorozatok* $\pm\infty$*-be tartanak, akkor fésűs egyesítésük is* ∞*-divergens.*

A bizonyítást mellőzzük. (Ld. N.Z. Hafo.)

Emlékezzünk az arkhimédeszi tulajdonságról szóló tételre. Segítségével az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat határérétkét meg tudjunk mondani.

14. Lemma.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Bizonyítás.

Legyen adott a tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ szám. Ekkor a határérték definíciója alapján:
$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ha

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

■

Néhány konkrét esetet bemutatunk.

15. Tétel. *Konstans sorozat konvergens, határértéke az adott konstans.*

Bizonyítás. Trivialitás.

16. Tétel. *Bármely rögzített $q \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } 1 < q; \\ 1, & \text{ha } q = 1; \\ 0, & \text{ha } |q| < 1. \end{cases}$$

Ha $q \leq -1$, akkor q^n oszcillálva divergens.

17. Megjegyzés. *Az (a_n) sorozat oszcillálva divergens, ha nem konvergens és nem tart a $\pm\infty$ egyikéhez sem.*

Bizonyítás.

Ha $1 < q$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n \cdot (q-1),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

azaz tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ számra, ha $\frac{K-1}{q-1} < n$, akkor $K < q^n$, vagyis $q^n \to \infty$.

A $q = 1$ eset nyilvánvaló.

Ha $|q| < 1$, akkor $1 < \frac{1}{|q|}$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor $\exists \nu$, hogy $\nu < n$-re

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon},$$

tehát $|q^n| = |q|^n < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy $q^n \to 0$.

Ha $q \leq -1$, akkor páros kitevő esetén $q^n \geq 1$, páratlan kitevő esetén $q^n \leq -1$, márpedig a fésűs egyesítésről szóló tételből ez azt jelenti, hogy ekkor a (q^n) sorozat oszcillálva divergens.

18. Tétel. *Bármely rögzített* $0 < a \in \mathbb{R}$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, *továbbá* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bizonyítás.

Az első állítás bizonyításához legyen $0 < a$ rögzített. Ha $0 < \varepsilon \leq 1$, akkor az előző tétel értelmében $(1+\varepsilon)^n \to \infty$, illetve $(1-\varepsilon)^n \to 0$. Így létezik ν_1 és ν_2 úgy, hogy $\nu_1 < n$ esetén $a < (1+\varepsilon)^n$, és $\nu_2 < n$ esetén $(1-\varepsilon)^n < a$, azaz ha $\nu_0 := \max(\nu_1; \nu_2) < n$, akkor $(1-\varepsilon)^n < a < (1+\varepsilon)^n$, tehát $1-\varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1+\varepsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$.

Ha $1 \leq \varepsilon$, akkor az előzőekben tett megállapításaink szerint az $\varepsilon = 1$-nek megfelelő ν_0 megfelelő.

A másik állítás bizonyítása a számtani-mértani közepekre vonatkozó összefüggést hívja segítségül.

$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{1 \cdots 1 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{1+\cdots+1+\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n} = \frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} = 1+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right) \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Az utolsó egyenlőtlenség jobb oldalán $\frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$, hiszen $\sqrt{n} \to \infty$, ha $n \to \infty$. Azaz

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1,$$

valahonnan kezdve már biztosan teljesül. Szemléletünk alapján világos, hogy ezzel a bizonyítás kész.

■

19. Megjegyzés. *Érezhetjük, hogy egy bizonyításban szemléletre hivatkozni „szentségtörés". Valóban. Alább közöljük, hogy miként válik precízzé a fönti bizonyítás.*

20. Tétel. *Ha* $a_n \to a, b_n \to b$, *továbbá* $\exists \nu : \forall n > \nu$ *indexre* $a_n \leq b_n$, *akkor* $a \leq b$.

A bizonyításától eltekintünk.

21. Megjegyzés. *Az előző tételben az $a_n < b_n$ föltétel nem mond semmivel sem többet. Gondoljunk például az $a_n \equiv 0$, $b_n = \frac{1}{n}$ sorozatokra.*

22. Tétel. *(Rendőr-elv.)*

Legyenek az a_n, b_n, c_n sorozatok olyanok, amelyekhez található olyan ν, hogy $\forall n > \nu$ indexre:

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

továbbá $a_n \to l, b_n \to l$. Ekkor $c_n \to l$.

Bizonyítás.

Legyen $0 < \varepsilon$ rögzített. A föltételek alapján

$$\exists \nu_1 \ \forall n > \nu_1 : \ l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon,$$

valamint

$$\exists \nu_2 \ \forall n > \nu_2 : \ l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon.$$

Legyen $\hat{\nu} := \max(\nu, \nu_1, \nu_2)$. A föntiek alapján $\forall \tilde{\nu} > \hat{\nu}$ esetén

$$l - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \varepsilon,$$

azaz $\forall n > \hat{\nu}$ esetén $|c_n - l| < \varepsilon$.

$\blacksquare$

A rendőr-elv alapján tehát mostmár biztosak lehetünk benne, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.

23. Tétel. *Ha $a_n \to a, b_n \to b$ és $a < b$, akkor $\exists \nu$, hogy $\forall n > \nu$ esetén $a_n < b_n$.*

24. Megjegyzés.

- *Ennek a tételnek a bizonyítását is mellőzzük.*
- *Az $a \leq b$ föltétellel nem tudjuk állítani, hogy $a_n \leq b_n$ akár egyetlen indexre is. Példaként tekintsük az $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{-1}{n}$ sorozatokra.*

Föltűnhetett, hogy az eddigiekben használtunk olyan állításokat, amelyek igazságáról nem bizonyosodtunk meg. Ezt a hiányosságot most pótoljuk.

25. Tétel. *(A határérték-képzés linearitása.)*

Ha $a_n \to a, b_n \to b$, *akkor* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n \to \lambda \cdot a + \mu \cdot b.$$

Bizonyítás.

A bizonyítást két lépésben végezzük. Először a konstanssal szorzásra vonatkozó állítást mutatjuk meg.

Ha $c = 0$, akkor $ca_n \equiv 0$.

Legyen most $0 < |c|$ és $0 < \varepsilon$ tetszőleges. Az (a_n) konvergenciája alapján $(|a_n - a| < \varepsilon)$:

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a| < \varepsilon,$$

ha $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} =: \hat{\varepsilon}$.

Az ehhez tartozó $\hat{\nu}$ küszöbindextől kezdve már biztosan teljesül, hogy $|ca_n - ca| < \varepsilon$.

Második lépésben az összegzéssel fölcserélhetőséget látjuk be.

$a_n \to \lambda a$ miatt $\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \nu_1 : \forall n > \nu_1\ |a_n - \lambda a| < \varepsilon_1$, hasonlóképpen

$b_n \to \mu b$ miatt $\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists \nu_2 : \forall n > \nu_2\ |b_n - \mu b| < \varepsilon_2$.

Mivel

$$|a_n + b_n - (\lambda a + \mu b)| \leq |a_n - \lambda a| + |b_n - \mu b| < \varepsilon,$$

ha $|a_n - \lambda a| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $|b_n - \mu b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha az $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, illetve $\nu := \max(\nu_1, \nu_2)$ választással élünk, akkor $\forall n > \nu$ esetén $|a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$.

■

26. Következmény.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A < \infty \Leftrightarrow |a_n - A| \to 0$$

27. Lemma. *Ha* $a_n \to 0$ *és* b_n *korlátos, akkor* $(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n) \to 0$.

Bizonyítás.

b_n korlátossága miatt $\exists K > 0$ úgy, hogy $|b_n| \leq K$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Az $a_n \to 0$ miatt elegendően nagy n-re: $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. Így

$$|a_n \cdot b_n| < \left(\frac{\varepsilon}{K}\right) \cdot K = \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

esetén. ∎

28. Tétel.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b\text{: } \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Bizonyítás.

A föltételek alapján (mindkét sorozat konvergens) mindkét sorozat korlátos, továbbá fölhasználjuk a legutóbb említett következményt ($a_n - a \to 0, b_n - b \to 0$). Mivel:

$$a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n - a) \cdot b_n + a \cdot (b_n - b).$$

A lemma alapján a jobb oldal mindkét tagja zérókonvergens. Az összegzésre vonatkozó tétel alapján az egész jobb oldal nullához tart. Ismételten fölhasználva a következményt az állítás igaz voltát beláttuk.

∎

29. Tétel. *Ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ *és* $\forall n \in \mathbb{N}$ *esetén* $b_n \neq 0$, *továbbá* $b \neq 0$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Ezen tétel bizonyításához az előző tétel értelmében elegendő belátni a következő lemmát.

30. Lemma.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0\text{: } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$$

Bizonyítás.

Legyen $0 < \varepsilon$ adott. Kell: $|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$. Fölhasználjuk, hogy

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - a_n}{a \cdot a_n}.$$

$a_n \to a$ miatt $\exists \nu_1$ úgy, hogy $\nu_1 < n$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon \frac{a^2}{2}$. Mivel $0 < \frac{|a|}{2}$, ezért $\exists \nu_2$ úgy, hogy $\nu_2 < n$ esetén $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$, ami azt is jelenti, hogy $\nu_2 < n$ esetén $\frac{|a|}{2} < |a_n|$ ($0 < a$ esetén $a_n > a - \frac{a}{2}$ $a < 0$ esetén pedig $a_n < a + \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} = -\frac{|a|}{2}$).

Így $n > \max(\nu_1, \nu_2)$ esetben

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|a \cdot a_n|} < \frac{\varepsilon \frac{a^2}{2}}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} = \varepsilon.$$

■

31. Tétel.

$$\forall n : 0 \leq a_n \text{és} \lim_{n\to\infty} a_n = a\text{:} \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$$

Bizonyítás.

Az a_n konvergencia azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \nu_1 \ \forall n > \nu_1 : \ |a_n - a| < \varepsilon_1.$$

Legyen $0 < \varepsilon$ rögzített.

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| \leq \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a}}\right| < \varepsilon$$

teljesül, ha $\varepsilon_1 := \sqrt{a}\varepsilon$ és $\nu := \nu_1, \ n > \nu$.

Ha $a = 0$, akkor

$$|\sqrt{a_n} - 0| = |\sqrt{a_n}| = \sqrt{a_n} < \varepsilon,$$

ha $a_n < \varepsilon^2$, azaz $\varepsilon_1 := \varepsilon^2, \nu = \nu_1$.

■

Az előző tételben nem kötöttük ki, hogy $0 < a$. Miért?

Bizonyítás nélkül közöljük még a következőt.

32. Tétel.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a: \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

Visszatérünk a torlódási pontokhoz, hiszen látható: minden határérték egyben torlódási pont, ám fordítva ez nem igaz. Sőt a torlódási pontok száma klasszifikálja is a sorozatokat. Fontos tulajdonsága a korlátos sorozatknak a következő.

Ha az a_n sorozat fölülről korlátos és nem tart $-\infty$-hez, akkor $\forall\varepsilon > 0$, $\exists!S$ szám azzal a tulajdonsággal, hogy $(S - \varepsilon)$-nál nagyobb tag végtelen sok, $(S + \varepsilon)$-nál nagyobb tag legfeljebb véges sok van a sorozatban. Ezt az S-t a sorozat legnagyobb torlódási pontjának, avagy limesz szuprémumának hívjuk:

$$S := \limsup a_n.$$

Alulról korlátos sorozat esetén analóg módon vezethető be a legkisebb torlódási pont, másként limesz inferior ($\liminf a_n$).

Miért is fontosak ezek? Lássuk.

33. Tétel. *Az a_n sorozatnak az α szám torlódási pontja pontosan akkor, ha $\exists a_{n_k}$ részsorozat, melyre:* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$.

Bizonyítás.

Elegendőség.

Ha az $a_{n_k} \to \alpha$, akkor $\forall\varepsilon > 0$ esetén valamely n-től kezdve

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_k} < \alpha + \varepsilon,$$

vagyis a sorozatnak végtelen sok tagja van az $(\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon)$ intervallumban, azaz α torlódási pont.

Szükségesség.

Legyen α torlódási pont. Ekkor az $(\alpha-1;\alpha+1)$ intervallumban megtalálható a sorozat valamely a_{n_1} tagja. Az $(\alpha-\frac{1}{2};\alpha+\frac{1}{2})$ intervallumban megtalálható valamely $a_{n_2}\neq a_{n_1}$, $n_1<n_2$ tag, hiszen ellentétes esetben véges sok tag esne ebbe az intervallumba. Folytatva ezt az okoskodást azt kapjuk, hogy

$$\exists n_k > n_{k-1} > \cdots > n_2 > n_1 : \ \alpha - \frac{1}{k} \leq a_{n_k} \leq \alpha + \frac{1}{k}.$$

A rendőr-elv miatt tehát $a_{n_k} \to \alpha$.

■

34. Tétel. *(Bolzano-Weierstrass tétel)*

Minden korlátos sorozatból kiválasztható egy konvergens részsorozat. Másképpen fogalmazva egy korlátos sorozat pontosan akkor konvergens, ha egyetlen torlódási pontja van, azaz

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A < \infty \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = A.$$

Bizonyítás. Az oroszlánfogás módszere.

Tfh. az $[a;b]$ intervallum tartalmazza a sorozat tagjait. Felezzük meg ezt. Legalább az egyik fele a sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza, legyen ez $[a_1;b_1]$, melyet megfelezve szintén elmondható, hogy legalább az egyik félben az a_n sorozat végtelen sok tagja megtalálható. Jelöljük ezt $[a_2;b_2]$. Ezt az eljárást folytatva egy $([a_n;b_n])$ sorozathoz jutunk, melyre:

$$[a_{n-1};b_{n-1}] \subset [a_n;b_n], \text{illetve } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Utóbbi tuladonság mutatja, hogy az intervallumok hossza zérókonvergens. A Cantor-axióma pedig azt mondja, hogy ez a sorozat egy α pontot határoz meg. Ez az α az (a_n) sorozat egy torlódási pontja, mert véve annak bármely környezetét, elég nagy n-re $[a_n;b_n]$ benne van ebben a környezetben. Tekintettel arra, hogy $[a_n;b_n]$ az (a_n) sorozat végtelen sok tagját tartalmazza, így készen vagyunk.

■

Már csak az van hátra, hogy megmutassuk: valóban létezik legkisebb és legnagyobb határérték, ha a sorozat korlátos.

35. Tétel. *Egy korlátos sorozat torlódási pontjai között mindig van legkisebb és legnagyobb.*

Bizonyítás.

Legyen $m \leq a_n \leq M$, továbbá a torlódási pontok halmaza H. $H \neq \emptyset$ a B-W tétel miatt. Ha α egy torlódási pont, akkor $a_{n_k} \to \alpha$. ($m \leq a_{n_k} \leq M, m \leq \alpha \leq M$ a határérték egyenlőtlenségi tételek miatt.) H tehát nemüres, korlátos, így létezik szuprémuma, infimuma. Legyen $\beta := \sup H$, továbbá $0 < \varepsilon$ tetszőleges. Mivel $\beta - \varepsilon$ már nem fölső korlátja H-nak, így létezik olyan α torlódási pont, hogy

$$\beta - \varepsilon < \alpha \leq \beta.$$

Legyen most $\delta > 0$ olyan kicsi, hogy

$$\beta - \varepsilon < \alpha - \delta < \alpha \leq \beta.$$

Mivel α torlódási pont, ezért végtelen sok n-re:

$$\alpha - \delta < a_n < \alpha + \delta.$$

Így igaz az is, hogy

$$\beta - \varepsilon < a_n < \beta + \varepsilon$$

végtelen sok n-re. Ez pedig azt jelenti, hogy $\beta \in H$ a legnagyobb torlódási pont. ■

A torlódási pont létezésére adott szükséges és elegendő föltétel bizonyításából már sejthető, hogy a sorozatoknak van egy eddig nem említett tulajdonsága.

36. Definíció. *Az (a_n) sorozat monoton növekedő (csökkenő), ha*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq a_{n+1} \ (a_{n+1} \leq a_n).$$

Szigorú reláció esetén szigorú monotonitásról beszélünk.

37. Tétel. *Minden sorozatból kiválasztható egy monoton részsorozat.*

Bizonyítás.

Tfh. a sorozatnak nincs legnagyobb eleme. Tekintsük valamely a_{n_1} tagot, melynél nagyobb tagja van a sorozatnak, különben az $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ közül a legnagyobb a sorozatnak is legnagyobb eleme volna. Legyen ez az a_{n_1}-nél nagyobb tag a_{n_2}. Ennél nagyobb tag is kell legyen a sorozatban különben az $a_1, a_2, \ldots, a_{n_2}$ közül a legnagyobb a sorozat legnagyobb eleme volna. Ezt az eljárást folytathatjuk a végtelenségig, és így kapunk egy szigorúan monoton növekedő részsorozatot.

Most tfh. van a sorozatban legnagyobb elem. Ha el lehet hagyni véges számú tagot a sorozatból úgy, hogy a megmaradó sorozatban már nincsen legnagyobb tag, akkor az előző gondolatmenetet elvégezve ismét megkapjuk a kívánt sorozatot.

Ha elhagyva is véges sok tagot, a megmaradó sorozatban van legnagyobb tag, akkor az az eredeti sorozatnak is legnagyobb tagja, és bármelyik tag után következők között is van legnagyobb. Legyen a_{k_1} a sorozat legnagyobb tagja (több ilyen esetén valamelyiket jelöljük így), a_{k_2} az a_{k_1} utáni tagok közül a legnagyobb, s.í.t. Kaptuk:

$$k_1 < k_2 < \cdots : a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_i} \geq,$$

vagyis az így kapott részsorozat monoton csökkenő.

■

Érdemes megvizsgálni, hogy milyen kapcsolat van a konvergencia, a korlátosság és a monotonitás között.

38. Tétel. *Korlátos, monoton sorozat konvergens.*

Bizonyítás.

Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy (a_n) monoton növő és fölülről korlátos. (Monoton növő sorozat alulról korlátos.) Legyen $l := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, továbbá $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az $l - \varepsilon$ már nem fölső korlát, vagyis $\exists \nu : l - \varepsilon < a_\nu$. A monotonitásból és abból, hogy l fölső korlát:

$$\forall n > \nu \; l - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq l,$$

vagyis $\forall n > \nu$ esetén $|a_n - l| < \varepsilon$, tehát $a_n \to l$.

■

Monoton sorozatok viselkedéséről szól a következő

39. Tétel. *Legyen az (a_n) sorozat monoton növő. Ha a sorozat fölülről korlátos, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup a_n = \sup a_n,$$

ha fölülről nem korlátos, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Bizonyítás.

Ha (a_n) korlátos, akkor az előző tétel alapján készen vagyunk.

ha nem korlátos, akkor legyen K tetszőleges. Mivel K a sorozatnak nem fölső korlátja, azért $\exists\nu : K < a_\nu$. A monoton növekedés miatt

$$\forall n > \nu : \ K < a_\nu < a_n.$$

Kaptuk tehát, hogy

$$\forall K\ \exists\nu\ \forall n > \nu : \ K < a_n.$$

Tehát $a_n \to \infty$. ■

A torlódási pontok száma segítségével tudjuk kategorizálni a konvergens sorozatokat. A gond, hogy akárhogy is járunk el, az eddigiek alapján mindig föltételeztük, hogy ismerjük magát a határértéket. A következő tétel szintén szükséges és elegendő föltételt ad egy sorozat konvergenciájára, ám mindezt úgy, hogy nem kell ismerjük a limeszt.

40. Tétel. *(Cauchy belső konvergenciakritériuma.)*

Az (a_n) sorozat pontosan akkor konvergens, ha

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu\ \forall n, m > \nu : \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás.

Szükségesség.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_n \to a$, ezért $\exists \nu \ \forall n, m > \nu : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon.$$

Elegendőség.

Tudjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \ \forall n, m > \nu : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon = 1, m = \nu + 1$. Ekkor $\forall n > \nu$ esetén $|a_n - a_{\nu+1}| < 1$, tehát

$$\forall n > \nu : \ a_{\nu+1} - 1 < a_n < a_{\nu+1} + 1.$$

Legyen most

$$k := \min\{a_1; a_2; \ldots; a_\nu; a_{\nu+1} - 1\} \text{ és } K := \max\{a_1; a_2; \ldots; a_\nu; a_{\nu+1} + 1\}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\forall \nu : \ k \leq a_n \leq K,$$

vagyis az (a_n) korlátos.

A B-W. tétel miatt az (a_n) sorozatnak van torlódási pontja: α. Megmutatjuk, hogy α az (a_n) sorozatnak határértéke.

Tfh. indirekt, hogy nem határérték. Ekkor van olyan I_α környezete, amelyből az (a_n) végtelen sok tagja kimarad. Ezen kimaradó tagokból álló sorozatnak is van torlódási pontja: $\beta \neq \alpha$, ami egyben az eredeti sorozatnak is torlódási pontja. A Cauchy-fölételből az $\varepsilon := \frac{|\beta - \alpha|}{3}$ értékhez is tartozik egy ν küszöbindex. Mivel $|a_n - \alpha| < \varepsilon, |a_n - \beta| < \varepsilon$ végtelen sok n-re, ezért

$$\exists i > \nu : \ |a_i - \alpha| < \varepsilon \text{és } \exists j > \nu : \ |a_j - \beta| < \varepsilon.$$

Ám ekkor

$$3\varepsilon = |\beta - \alpha| \leq |a_i - \alpha| + |a_j - a_i| + |\beta - a_j| < 3\varepsilon,$$

ami nyilvánvaló ellentmondás.

∎

41. Megjegyzés.

- *Az olyan sorozatokat, amelyek kielégítik a Cauchy-föltételt Cauchy-sorozatnak nevezzük.*
- *Az utóbb említett tétel úgy is aposztrofálható, hogy a véges határértékű sorozatok osztálya és a konvergens sorozatok osztálya egybeesik.*
- *A valós függvénytanban domborodik ki leginkább e tétel jelentősége, ugyanis az olyan struktúrákat, melyben minden Cauchy-sorozat konvergens teljesnek nevezik.*

Néhány elengedhetetlenül fontos példát mutatunk még, melyeket önálló állításként fogalmazunk meg.

42. Tétel.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =: e$$

Bizonyítás.

Legyen $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ és $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. A számtani-mértani közepek közötti öszefüggés alapján (a_n) monoton növekedő, (b_n) monoton csökkenő. $\forall n$-re $a_n < b_n$, így írhatjuk

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq a_1.$$

Ezek alapján tehát az (a_n) sorozat monoton növő és fölülről korlátos, vagyis konvergens: $a_n \to \alpha$, hasonlóképpen $b_n \to \beta$, továbbá $\alpha \leq \beta$. Tehát

$$\beta \leftarrow b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_n \to 1\cdot\alpha,$$

amiből kaptuk, hogy $\alpha = \beta$.

■

43. Tétel. *(Newton gyökvonó algoritmusa.) Legyen $c > 0$. Az*

$$x_1 := 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

sorozat konvergens, és határértéke a $\sqrt{c}$ szám.

Bizonyítás.

A sorozat definíciójából adódik, hogy $\forall n$-re $0 < x_n$, továbbá, ha $1 \leq n$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2} \geq \sqrt{x_n \frac{c}{x_n}} = \sqrt{c},$$

vagyis a sorozat alulról korlátos. Ha $2 \leq n$, akkor

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2} \leq x_n \Leftrightarrow c \leq {x_n}^2.$$

Kaptuk, hogy a sorozat konvergens: $x_n \to l : \sqrt{c} \leq l$. Igaz továbbá:

$$\frac{c}{x_n} \to \frac{c}{l},$$

azaz

$$l \leftarrow x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2} \to \frac{l + \frac{c}{l}}{2}.$$

Kaptuk, hogy $l = \frac{l+\frac{c}{l}}{2}$, amiből l-re egyetlen érték jöhet csak szóba, méghozzá a $\sqrt{c}$.

$\blacksquare$