A szerkesztőbizottság elnöke: Szendrei János
Felelős szerkesztő: Pintér Lajos
A szerkesztőbizottság tagjai:

A szerkesztőbizottság címe: POLYGON szerkesztősége,
Bolyai Intézet,
Szeged, Aradi vértanúk tere 1., 6720.

A lap megrendelésével, terjesztésével kapcsolatos kérdéseket, észrevételeket Varga Antalnak kérjük címezni.

Tanácsok szerzőinknek.

A POLYGON a matematikának, illetve a matematika oktatásának a területéről közöl cikkeket. Cikket bárki benyújthat a szerkesztőség címére postán, vagy bármely szerkesztőn keresztül személyesen is.

A cikkek hosszának nincsen alsó határa, akár egy ötlet vagy gondolat is benyújtható, de kivételes esetektől eltekintve, nem lehet 10–15 nyomtatott oldalnál több. Idegen nyelvű cikkek fordítása is elfogadható, az eredeti pontos bibliográfiai adatainak mellékelésével.

Bár a benyújtandó cikkek formájára nincs igazán mérvadó előírás, lehetőség szerint legyen kettes sortávolsággal A4-es géppapírra gépelve. A lapok legyenek megszámozva, az első lap tetején legyen ott a cím és a szerző neve, míg az utolsó lapon a szerző pontos címe. Lehetőleg ne használjunk lábjegyzeteket! Fordítsunk az ábrákra külön figyelmet, ha lehet, külön lapon is mellékeljük.

Minden benyújtott cikket megvizsgálunk a közölhetőség szempontjából, ha szükséges, legalább két bírálóval. A szerkesztőbizottság döntéséről a szerzőt értesítjük.

A megjelent cikkek szerzői 20 különlenyomatot és egy tiszteletpéldányt kapnak. Ha a cikket a szerkesztőbizottság nem fogadja el, akkor az eredetit visszaküldi.

József Attila Tudományegyetem, Bolyai Intézet
SZEGED, 1991

POLYGON
IV. kötet 2. szám 1994.

Az algebrai struktúrák állatkertje*

Csákány Béla

Élettelen dolgokat olykor – komolyan vagy tréfásan – élőlénynek nevezünk, versekben és hétköznapi beszédben egyaránt. "Drága jószág", „kezes állat" – mondja József Attila a gépről. "Nem indul az öreg kecske" – bosszankodik a motoros, ha baj van a gyujtással. Matematikus is megjegyzi néha, amikor hiába keres valamilyen előre megadott tulajdonságokkal rendelkező függvényt, vagy geometriai alakzatot: „Ilyen állat nincs is!"

Az állatok közeli és sokat tanulmányozott társaink. Évezredeken át vizsgáltuk, egyre eredményesebben

1) alakjukat, szervezetüket (alaktan, morfológia),
2) „működésüket", életük folyamatait (élettan, fiziológia),
3) új példányaik létrejöttének törvényeit (örökléstan, genetika),
4) együttélésüket (társulástan, cönológia),

továbbá osztályoztuk őket alakjuk és működésük szerint (rendszertan, szisztematika). Nem lehet véletlen, hogy az emberi megismerés számos területe, a kémiától az irodalomtudományig, hasonló megközelítéseket alkalmaz vizsgálata tárgyaival kapcsolatban, természetesen különböző mértékben és eltérő elnevezésekkel. Nem kivétel ez alól a matematika sem. Egy kis nagyvonalúsággal kimondhatjuk, hogy minden tudományág az általa vizsgált *struktúrák* formáival, funkcióival, keletkezésével, összekapcsolódásaival, valamint rendszerezésükkel foglalkozik.

* Ez a cikk a József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete által szervezett középiskolai matematikai táborban 1993. június 24-én elhangzott előadás részletesebb változata.

Ezek a struktúrák igen változatosak: biológiai struktúrák az élőlények, kémiai struktúrák a molekulák, irodalomtudományi struktúrák az írásművek; a matematikai struktúrák pedig – a jelenleg uralkodó matematikai közfelfogás szerint – olyan halmazok, amelyeken rendezés, távolság, művelet (ezekből esetleg egyszerre több is!) van értelmezve. A matematikai struktúrának ezt a fogalmát – valamivel általánosabban és pontosabban – francia és amerikai matematikusok egy közösen dolgozó csoportja vezette be a harmincas években (könyveik címlapján „Bourbaki"-t tüntették fel szerzőként; ez egy 19. századi görög származású francia tábornok neve, akinek szobra környékén tudósaink állítólag szívesen üldögéltek és gondolkoztak). Bourbaki legáltalánosabb fogalma a következő: a matematikai struktúrák pontosan azok a dolgok, amelyek halmazokból halmaz-szorzás és részhalmaz-képzés útján keletkeznek (az A és B *halmazok szorzata* az összes olyan (a,b) párokból álló halmaz, ahol $a \in A$, $b \in B$. Igy pl. a valós számok halmazának önmagával való szorzata nem más, mint a valós számpárok halmaza, másszóval a sík összes pontjai koordináta-párjainak halmaza. Hasonlóan értelmezhetjük kettőnél több halmaz szorzatát).

1. FELADAT. *Az $y = x^2$ függvény matematikai struktúra-e a Bourbaki-féle értelemben?*

Érdekes megfigyelni, hogy a különböző tudományágak által vizsgált struktúrák különböző értelemben *léteznek*: a tigris például (mint biológiai struktúra) kézzelfoghatóan (habár ez veszélyes...) A benzolgyűrű is konkrétan létezik, jóllehet értelmünk és nem érzékeink révén van tudomásunk róla. „A varázshegy" vagy József Attila Ódája nem konkrétan létezik, hiszen nem tekinthetjük azonosnak a papírral és nyomdafestékkel, amely által megjelenik; mindamellett ezek a művek konkrét (létező vagy lehetséges) struktúrák képei. A matematikai struktúrák csupán gondolkodó agyunkban léteznek (ezért szépek, ti. szabadon kezelhetjük őket), bár gyakran a matematikai struktúrákat is konkrét struktúrák képeinek tekintjük (ezért lehetnek hasznosak). Ennélfogva természetes, hogy a különféle struktúrákat az eszközök különböző készleteivel vizsgáljuk. Ezek részint konkrét eszközök, mint pl. a mikroszkóp, részint pedig gondolati eszközök, mint pl. a számolás és a logika. Minden különbözőség mellett is, az állatok tanulmányozásánál természetes módon fellépő kutatási szempontok rendszerint másfajta struktúrák esetén is alkalmazhatók.

2. (NEM-MATEMATIKAI) FELADAT.
Mik a csillagászati,
orvostudományi,
történettudományi
struktúrák? Mi lesz ezekre vonatkozóan az alaktan, élettan, stb. megfelelője?

A következőkben meggondoljuk, hogyan érvényesül a bevezetésben felsorolt öt kutatási irányzat a matematika egyik nagy ágában, az algebrában. Ehhez szükségünk van az *algebrai struktúra* fogalmára, amelyhez viszont a *művelet* fogalma kell. Művelet az A halmazon – ez egy kétváltozós függvény, amely A-n van értelmezve, értékkészlete pedig ugyancsak A-ba esik, bár azt nem szükségképpen meríti ki. Másképpen beszélve, egy A-n értelmezett művelet az A-ból képezett minden elempárnak megfeleltet egy-egy A-beli elemet. (Az algebra egyes ágaiban kettőtől különböző változó-számú függvényeket is szokás műveletnek nevezni; mi az egyszerűség kedvéért szorítkozunk kétváltozós függvényekre.) Művelet pl. az egész számok összeadása, a természetes számok legnagyobb közös osztójának képzése, a racionális számok számtani közepének képzése. Algebrai struktúra – ez egy halmaz (az algebrai struktúra *alaphalmaza*) együtt egy vagy több rajta értelmezett művelettel. Algebrai struktúra pl. az egész számok halmaza az összeadással és kivonással, a természetes számok halmaza a legnagyobb közös osztó képzésével és a legkisebb közös többszörös képzésével, a racionális számok halmaza a számtani közép képzésével. Ezeknek az algebrai struktúráknak az alaphalmaza végtelen halmaz. Véges alaphalmazú algebrai struktúrákra is adhatunk egyszerű példákat: egy véges halmaz összes részhalmazainak halmaza az egyesítés képzése művelettel; a 10-nél nem nagyobb természetes számok halmaza a *min* művelettel ($min(x,y)$ az x és y számok minimumát jelenti, azaz közülük azt a számot, amelyik nem nagyobb a másiknál); továbbá a $\{páros, páratlan\}$ halmaz (amelynek tehát két fogalom az eleme), melyen az összeadást így értelmezzük:

$$páratlan + páratlan = páros$$

(mert páratlan és páratlan szám összege *mindig* páros),

$$páratlan + páros = páratlan$$

stb. Vegyük észre, hogy míg a $\{0,1\}$ (kételemű) halmaz a szorzással együtt algebrai struktúra, addig $\{0,1,2\}$ már nem, hiszen a szorzás *nem* művelet az utóbbi háromelemű halmazon: $2 \cdot 2 = 4 \notin \{0,1,2\}$.

3. FELADAT. *Algebrai struktúra-e az egész számok halmaza a számtani közép képzésével együtt?*

4. FELADAT. *Az algebrai struktúrák matematikai struktúrák-e a Bourbaki-féle értelemben?*

Mostantól kezdve főleg olyan algebrai struktúrákkal foglalkozunk, amelyek halmaza véges és egyetlen műveletük van. Ezeknek egy igen szelíd fajtájához jutunk a következő módon:

Vegyünk egy 1-nél nagyobb m természetes számot. A $\{0,1,\ldots,m-1\}$ számok az összeadással nem alkotnak ugyan algebrai struktúrát, hiszen

$$(m-1)+(m-1)>m-1\notin\{0,1,\ldots,m-1\},$$

de ezen könnyen segíthetünk. Nevezzük *modulo m összeadásnak* azt az összes egész számok halmazán értelmezett kétváltozós függvényt, amely bármely két egész számhoz az összegük m-mel való osztásánál fellépő maradékot rendeli. Mivel ez a maradék mindig a $0,1,\ldots,m-1$ számok valamelyike, a modulo m összeadás művelet lesz a $\{0,1,\ldots,m-1\}$ halmazon, s vele ez a halmaz algebrai struktúrává válik. Ezt a struktúrát így fogjuk jelölni: $(\mathbf{m},\oplus)$, ahol $\mathbf{m}$ a $\{0,1,\ldots,m-1\}$ halmazt jelenti, az összeadás jelét magába foglaló kör pedig azt jelzi, hogy az összeadást – az iménti megállapodás szerint – módosítottuk.

5. FELADAT. *Vezessük be az* $(\mathbf{m},\odot)$ *algebrai struktúrákat is !*

A most bevezetett algebrai struktúrákat hivatalosan így hívják: a *modulo m maradékosztályok additív csoportja* ill. *multiplikatív félcsoportja*. Mi, rövidség kedvéért, csak a most bevezetett jelöléssel hivatkozunk rájuk. Továbbá "algebrai struktúra" helyett ezentúl egyszerűen *struktúrát* mondunk; másféle struktúrákról ezentúl úgyis csak elvétve esik szó.

1. Alaktan. A struktúra alakját táblázattal adhatjuk meg. Példa a $(\mathbf{4},\oplus)$ struktúra táblázata:

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Láthatóan a táblázat sorokból és oszlopokból áll. Az elkülönített baloldali oszlop és felső sor megadja a struktúra elemeit (ugyanabban a sorrendben), emellett a bennük levő elemek ki is jelölik a sorokat és oszlopokat: pl. a baloldali oszlop 2 eleme a 2 3 0 1 sort jelöli ki. Az, hogy a 2 által kijelölt sor és a 3 által kijelölt oszlop találkozásánál 1 áll, azt jelzi, hogy $2\oplus 3=1$. A táblázat ismeretében tehát a műveletet bármely elempáron el tudjuk végezni.

Művelet táblázattal való megadását a múlt században vezette be Cayley angol matematikus. A táblázat szinte fényképe a struktúrának: sok tulajdonság leolvasható róla.

Oldjuk meg a $3\oplus x=1$ egyenletet $(\mathbf{4},\oplus)$-ban! Ehhez meg kell keresnünk a táblázat 3-mal jelölt sorában az 1 elemet, s az őt tartalmazó oszlopot kijelölő elem – esetünkben 2 – lesz a megoldás. Tekintsünk egy $(H,\circ)$ struktúrát (itt $\circ$ egy közelebbről meg nem határozott műveletet jelent, hasonlóan ahhoz, ahogy pl. az x betű rendszerint egy határozatlan számot jelent). Ha az $a\circ x=b$ és $y\circ c=d$ egyenletek minden $a,b,c,d\in H$ esetén megoldhatók, azt mondjuk, hogy a $(H,\circ)$ struktúra *invertálható*. Ez gyakori és jól használható tulajdonság; invertálható például az egész számok halmaza az összeadással, és minden $(\mathbf{m},\oplus)$ struktúra (de $(\mathbf{m},\odot)$ nem!). Az előbbi egyenletmegoldás tapasztalatát általánosítva megállapíthatjuk, hogy egy struktúra pontosan akkor invertálható, ha táblázatának minden sorában és minden oszlopában minden eleme előfordul (ami elvben nehézség nélkül ellenőrizhető).

6. FELADAT. *Hogyan olvasható le a struktúra táblázatáról az, hogy a struktúra kommutatív (azaz – az iménti jelöléssel –* $a\circ b=b\circ a$ *minden* $a,b\in H$ *esetén)?*

7. FELADAT. *Hogyan olvasható le a struktúra táblázatáról, hogy a struktúra egységelemes (azaz van olyan e eleme, amely úgy viselkedik, mint az 1 szám a számok szorzásánál:* $a\circ e=a$ *és* $e\circ a=a$ *minden* $a(\in H)$*-ra)?*

A $(H,\circ)$ struktúrát *asszociatívnak* nevezzük, ha $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ minden $a,b,c\in H$ esetén. Ez hasznos tulajdonsága pl. a számok összeadásának és szorzásának; ez teszi lehetővé, hogy kettőnél több tagú összegeket és többtényezős szorzatokat zárójel nélkül írhassunk fel. Nem minden művelet asszociatív, erre példák a kivonás és a számtani közép képzése. Leolvasható-e a struktúra asszociatív volta táblázatáról? Közvetlenül nem, csak a táblázat bizonyos átalakításai után (hasonlóan ahhoz, ahogy képfeldolgozással a fénykép által nyujtott ismeretek bővíthetők). Ezt a módszert Light-féle tesztnek nevezzük (1949). Alkalmazását az

(1)

	0	1	2
0	0	2	1
1	2	1	0
2	1	0	2

táblázattal megadott $(\mathbf{3}, *)$ struktúra példáján mutatjuk be.

Irjuk fel először annak a műveletnek a táblázatát, amely minden (x, y) párhoz az $(x*a)*y$ elemet rendeli, majd azét, amely minden (x, y) párhoz az $x*(a*y)$ elemet rendeli, ahol a a $\mathbf{3}$ halmaz *valamelyik rögzített* eleme. Ha a struktúra *bármely* a elemére az így kapott két táblázat megegyezik, akkor – és csak ekkor – a művelet asszociatív. A gyakorlatban az első táblázatot úgy kapjuk, hogy az eredeti táblázat sorait az a-val jelölt oszlopban látható sorrendben írjuk fel, a másodikat pedig úgy, hogy az oszlopokat rendezzük át az a-val jelölt sorban levő sorrendnek megfelelően. Az (1) táblázatból $a = 0$ esetén így a

	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

	0	1	2
0	0	1	2
1	2	0	1
2	1	2	0

táblázatokat kapjuk; itt tehát már az a elem első választásánál kiderült, hogy az (1) táblázattal megadott struktúra nem asszociatív. Általában felesleges a struktúra minden elemére összehasonlítani a két táblázatot; elegendő ezt egy olyan halmaz minden elemére elvégezni, amelyből a művelet – szükség esetén többszöri — alkalmazásával a struktúra bármely további eleme előáll. (Az ilyen halmazt a struktúra *generátorrendszerének* nevezzük. Pl. $(\mathbf{3}, *)$-nak minden kételemű részhalmaza generátorrendszere is, egyelemű generátorrendszere azonban nincs – ellenőrizzük!) Ha ugyanis *adott* a, b és *tetszőleges* $x, y \in H$ elemekre a $(H, \circ)$ struktúrában

$$(x \circ a) \circ y = x \circ (a \circ y)$$

és

$$(x \circ b) \circ y = x \circ (b \circ y),$$

akkor

$$(x \circ (a \circ b)) \circ y = ((x \circ a) \circ b) \circ y = (x \circ a) \circ (b \circ y) = x \circ (a \circ (b \circ y)) = \\ = x \circ ((a \circ b) \circ y)$$

is igaz.

8. Feladat. *Keressük meg a következő táblázattal megadott struktúrának egy legkevesebb elemből álló generátorrendszerét:*

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	4	1	4
2	0	0	2	3	0
3	0	3	2	3	2
4	0	0	4	1	0

9. Feladat. *Asszociatív-e ez a struktúra?*

A $(\mathbf{3}, *)$ struktúra természetesen felírható a következő táblázattal is:

	2	0	1
2	2	1	0
0	1	0	2
1	0	2	1

hiszen a baloldali oszlopban és a felső sorban az elemeket akármilyen sorrendben felírhatjuk. Azt mondjuk, hogy ez a táblázat *ekvivalens* az (1) táblázattal. Másrészt két táblázatról azt mondjuk, hogy *mintájuk* ugyanaz, ha méretük megegyezik, és valahányszor az egyik táblázatban (beleértve az elválasztott oszlopot és sort) két helyen egyenlő elemek állnak, mindannyiszor a másik táblázatban ugyanazon a két helyen ugyancsak egyenlő elemek állnak. Két struktúrát *azonos alakúnak* nevezünk, ha létezik olyan táblázat, amely ekvivalens az első struktúra táblázatával, mintája pedig ugyanaz, mint a másik struktúra táblázatáé.

10. Feladat. *Azonos alakú-e* $(\mathbf{5}, \oplus)$ *és* $(\mathbf{5}, \odot)$ *?*

11. FELADAT. *Azonos alakú-e a következő két táblázattal megadott struktúra?*

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	2	2

	a	b	c
a	a	b	a
b	b	b	b
c	c	b	b

Vegyük most a $(H_1, \circ)$ és $(H_2, \diamond)$ struktúrákat. Ezeket *izomorfnak* nevezzük, ha létezik olyan kölcsönösen egyértelmű ϕ leképezése H_1-nek H_2-re, hogy bármely $a, b \in H_1$ elemekre

(2) $$\phi(a) \diamond \phi(b) = \phi(a \circ b),$$

azaz ϕ a művelettel *felcserélhető:* mindegy, hogy a ϕ leképezést, vagy a műveletet végezzük el először. (Részletesebben: elemek képén elvégzett művelet eredménye mindig ugyanaz, mint az ugyanazon elemeken elvégzett művelet eredményének képe.) E fogalom felismerése 20. századi vívmány, jóllehet legismertebb példái sokkal korábbiak. A fogalom először az algebrában jelent meg, de hamar kiderült, hogy más matematikai és matematikán kívüli struktúrákra is alkalmazható. Klasszikus algebrai példa: a pozitív valós számok halmaza a szorzással és az összes valós számok halmaza az összeadással. Ezek izomorf struktúrák, mert ϕ-nek választhatjuk a (pl.) 10 alapú logaritmusfüggvényt. Egyébként a görög eredetű „izomorf" szó azonos alakút jelent, így hát nem lehet különösebben meglepő a következő feladat.

12. FELADAT. *Igazoljuk, hogy két struktúra akkor és csak akkor azonos alakú, ha izomorfok.*

Az „izomorfság" – szokásosabb szóval: *izomorfia* – jelentésén más tudományokban ugyancsak elgondolkodhatunk.

13. FELADAT.
Mit jelenthet az izomorfia a geometriában,
a kémiában,
a nyelvészetben?

2. Élettan. Hogyan „működnek" a struktúrák? A működés két legtermészetesebb módja, hogy

1) a művelet(ek)ből *összetett függvényként* újabb műveletek keletkezhetnek (pl. a valós számok halmazán a szorzásból az $f(x,y) = x^2 \cdot y$, az összeadásból és a szorzásból a $g(x,y) = x + y^2$ függvény, amely – hasonló társaival együtt –ugyancsak művelet);

2) a művelet *megőrizhet* ("tisztelhet") bizonyos, az elemek közötti viszonyokat (szokásosabb szóval: *relációkat*), ahogyan pl. az egész számok összeadása megőrzi a „nagyobb" relációt: ha $a > c$ és $b > d$, akkor $a + b > c + d$. (Ilyenkor azt mondjuk, hogy a művelet *monoton.*)

14. FELADAT. *Igazoljuk, hogy monoton műveletekből összetett függvényként keletkező művelet maga is monoton!*

Ehhez hasonló állítás igaz – és hasonlóan igazolható – bármilyen más relációkra is. Ha ezt elfogadjuk anélkül, hogy az összes relációkról áttekintést igényelnénk, akkor természetesnek látszik a következő tény: ha $(H, \circ)$ és $(H, \diamond)$ olyan struktúrák, hogy $\circ$ és $\diamond$ mindegyike előáll a másikból összetett függvényként, akkor $\circ$ és $\diamond$ ugyanazokat a relációkat őrzik meg.

15. FELADAT. *Tekintsük az* **5** *halmazt a* $2\odot x \oplus 4 \odot y$ *és a* $3 \odot x \oplus 3 \odot y$ *művelettel. Mutassuk meg, hogy*
mindkét művelet előállítható a modulo 5 *összeadásból összetett függvényként,*
a két művelet mindegyike előáll a másikból összetett függvényként,
a két művelet egyikéből sem áll elő a modulo 5 *összeadás összetett függvényként.*

Az említett természetesnek tűnő tény megfordítása is igaz, s ez már meglepő: ha két művelet ugyanazokat a relációkat őrzi meg, akkor mindegyik előállítható a másikból összetett függvényként. Ezt Geiger amerikai és Kaluzsnyin orosz matematikus bizonyította be egymástól függetlenül a hatvanas évek végén.

3. Örökléstan. Az élőlények genetikája nem azzal foglalkozik, hogyan keletkeznek az új élőlények, hanem azzal, hogy milyen tulajdonságaikat milyen szabályok szerint öröklik az utódaik (klasszikus genetika), és hogyan történik az átöröklés (molekuláris genetika). Az algebrai struktúrák genetikájáról beszélve először mégis azt kell megismernünk, hogyan kaphatunk új struktúrákat az adott régiekből (mindezt, persze, tekinthetjük a struktúrák élettana részének is).

Ha a $(H, \circ)$ struktúra alaphalmazának egy M részhalmaza maga is struktúra ugyanazzal a művelettel (tehát nem tudunk a művelettel „kijutni" az M részhalmazból), akkor azt mondjuk, hogy $(M, \circ)$ *részstruktúrája* $(H, \circ)$*-nek*. Ha $M = H$ vagy M egyelemű, akkor a részstruktúra *triviális*. A struktúrát *minimálisnak* nevezzük, ha csak triviális részstruktúrája van.

16. FELADAT. *Mutassuk meg, hogy* $(\mathbf{3}, *)$ *minimális,* $(\mathbf{4}, \oplus)$ *pedig nem minimális!*

Ha $(H_1, \circ)$ és $(H_2, \diamond)$ olyan struktúrák, amelyekre az izomorfia követelménye teljesül ϕ kölcsönösen egyértelmű volta kivételével (lásd a (2) formulát!), akkor azt mondjuk, hogy $(H_2, \diamond)$ *ábrázolása* $(H_1, \circ)$*-nek*. Ha ϕ kölcsönösen egyértelmű is, vagy H_2 egyelemű, akkor az ábrázolás *triviális*.A struktúrát *egyszerűnek* nevezzük, ha csak triviális ábrázolásai vannak.

17. FELADAT. *Mutassuk meg, hogy* $(\mathbf{3}, \oplus)$ *ábrázolása* $(\mathbf{6}, \oplus)$*-nak, a* $(\mathbf{3}; \oplus)$ *struktúra viszont egyszerű.*

Az egyszerű struktúrák rendkívül bonyolultak lehetnek (hasonlóan az egyszerű élőlényekhez). Egy példa: vegyük a szabályos dodekaéder mindazon elforgatásait valamilyen tengely körül, amelyek önmagába viszik át. Összesen 60 ilyen elforgatás van. Közülük bármely kettő szorzatán az egymás után való elvégzésükkel előálló forgatást értjük (nem teljesen nyilvánvaló, hogy így mindig forgatást kapunk!). Nyertünk tehát egy 60 elemű struktúrát. Erről megmutatható, hogy egyszerű (de ez nem egészen egyszerű...) Az utóbbi, látszólag nem különösebben érdekes tény azonnal fontossá válik, ha megtudjuk, hogy belőle – rendkívül mély és összetett gondolatmenettel – levezethető, hogy *az ötödfokú egyenletnek nem létezik gyökképlete.* (A másodfokúét ismerjük, a harmadfokúét egyetemen tanítják; a negyedfokúé létezik, csak olyan hosszú és nehezen használható, hogy nem is szokták felírni.) Ezt a tényt – még erősebb alakban * – Évariste Galois francia matematikus fedezte fel, és a halála előtti éjszakán írta le. 1832-ben huszonegy évesen halt meg, párbajban.

* Ha $n \geq 5$, van olyan n-edfokú egész együtthatós egyenlet, amelynek egyetlen gyöke sem fejezhető ki az együtthatóiból a négy alapművelet és (egész kitevős) gyökvonás segítségével.

Előfordulhat, hogy egy struktúrának a részstruktúrái is és az ábrázolásai is mind triviálisak, azaz ezzel a két képzési eljárással nem jön létre belőle újabb struktúra. Ilyenkor segíthet egy harmadik eljárás: a Descartes-szorzat képzése. A $(H_1, \circ)$ és $(H_2, \diamond)$ struktúrák *Descartes-szorzatán* (szokás *direkt szorzatnak* is nevezni) azt a struktúrát értjük, amelynek alaphalmaza H_1 és H_2 szorzata, műveletét pedig úgy végezzük, hogy a „szorzandó" párok első elemeire a $\circ$, második elemeire a $\diamond$ műveletet alkalmazzuk: ha $p_1, q_1 \in H_1, p_2, q_2 \in H_2$, akkor

$$(p_1, p_2) \cdot (q_1, q_2) = (p_1 \circ q_1,\ p_2 \diamond q_2).$$

Descartes neve azért szerepel itt, mert a Descartes-féle koordinátageometriában a vektorok összeadását éppen e szabály szerint végezzük; ott $\circ, \diamond$ és $\cdot$ szerepét egyaránt $+$ játssza. Hasonlóan értelmezhető kettőnél több struktúra Descartes-szorzata is.

18. FELADAT. *Mutassuk meg, hogy* $(\mathbf{2}, \oplus)$ *és* $(\mathbf{3}, \oplus)$ *Descartes-szorzata izomorf a* $(\mathbf{6}, \oplus)$ *struktúrával! Érvényes-e hasonló állítás* 2 *és* 3 *helyett bármilyen* m, n *természetes számokra?*

Rátérve a kérdésre, mely tulajdonságokat öröklik az „utód-struktúrák" (tehát a részstruktúrák, ábrázolások és Descartes-szorzatok), a megoldáshoz vezető első lépések nem nehezek.

19. FELADAT. *Mutassuk meg, hogy kommutatív struktúrák utódai is kommutatívak.*

Az, hogy egy $(H, \circ)$ struktúra kommutatív, azt jelenti, hogy "azonosan" teljesül benne $x \circ y = y \circ x$ (azaz x és y helyébe H bármely elemét írva érvényes egyenlőséget kapunk). Hasonlóan, a struktúra asszociatív volta is egy azonosság teljesülése. Ilyenfajta azonosságokat nem nehéz kitalálni; pl. ha $(x \circ y) \circ (u \circ v) = (x \circ u) \circ (y \circ v)$ azonosan teljesül, a struktúrát *mediálisnak* mondjuk (a racionális számok halmaza a számtani közép képzésével mediális, úgyszintén $(\mathbf{3}, *)$ is). Könnyen belátható, hogy ha egy azonosság érvényes egy struktúrában, akkor érvényes az utódaiban is. Annál érdekesebb, hogy ennek a megfordítása is igaz: ha egy tulajdonság öröklődik a struktúrák utódaira, akkor ez a tulajdonság nem más, mint bizonyos azonosságok (végtelen sok is lehet!) érvényessége. Ez Birkhoff amerikai matematikus nevezetes tétele (1935).

4. Társulástan. Régi természetrajz-könyvekben megtalálhatjuk a tengeri rózsa (nevű állat) és a remeterák szoros barátságát mutató képet. Másrészt a kutya és a macska többnyire "állati rosszul" jön ki egymással. Van ennek megfelelője a struktúrák körében? Van, mégpedig a következő. Vegyünk két műveletet a H halmazon: $\circ$ és $\diamond$. Azt mondjuk, hogy $\circ$ és $\diamond$ *összeférnek,* ha bármely $a, b, c, d \in H$ esetén az

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

táblázat sorain elvégezve a $\circ$ műveletet, s az így kapott elemeken a $\diamond$ műveletet, az eredmény ugyanaz, mintha előbb az oszlopokon végeznénk el a $\diamond$ műveletet, majd a kapott elemeken a $\circ$ műveletet. Figyeljük meg, hogy egy struktúra művelete *önmagával* ebben az értelemben pontosan akkor fér össze, ha a struktúra mediális (ami mindig fennáll, ha a struktúra asszociatív *és* kommutatív; a számok megszokott összeadása és szorzása ilyen szempontból tehát jól viselkedik).

Nevezzünk két struktúrát *összebékíthetőnek,* ha vannak olyan utódaik, amelyek összeférnek. Továbbá nevezzünk egy struktúrát *hiperaktívnak* (élettani fogalom!)*, ha műveletéből az alaphalmazán értelmezhető bármely más művelet előállítható összetett függvényként. E cikk szerzője bizonyította be néhány évvel ezelőtt, hogy ha egy struktúra összebékíthető egy hiperaktív struktúrával, akkor minden struktúrával összebékíthető.

5. Rendszertan. Amilyen fejlett az állatok rendszertana (törzsekre, osztályokra, rendekre stb. bomlik az állatok országa), olyan fejletlen a struktúráké. Állat elvben is csak végesszámú lehet (legalábbis Földünkön), míg a struktúrák állatkertje végtelen (még a véges alaphalmazúaké is!) Ezért a teljes rendszerezés nem látszik reményteljes célnak. Mindamellett struktúrák számos típusát lehet megkülönböztetni: beszélünk csoportról, félcsoportról, kvázicsoportról, „loop"-ról (magyarul hurokról, de ezt még – vagy

* A hivatásos algebristák „hiperaktív" helyett *primál* struktúráról beszélnek. Néhány más fogalom jelölésére szolgáló szót ugyancsak a zoológiai hasonlat érdekében használunk: „összeférnek" helyett *felcserélhetők,* „összebékíthetők" helyett *kompatibilis varietást generálnak* a szokásos algebrai szóhasználat. Az "ábrázolás" szó megszokott ugyan az algebrában, de – itteni jelentésében – *homomorf kép* az általánosan használt kifejezés.

már? – nem szokás magyarul mondani), monoidról, kötegről, félhálóról, stb. Ezek között kétségtelenül a *csoport* a legfontosabb fogalom: a csoport mindenütt jelenvaló a matematikában. Csoportnak az asszociatív és invertálható struktúrát nevezzük. Példa: $(\mathbf{m}, \oplus)$ (minden m-re [!]), valamint a dodekaéderrel kapcsolatban említett struktúra.

Befejezésül néhány mondat arról, mit tudunk *véglegesen* a struktúrákról. Ismerjük a kételemű struktúrákat a legáltalánosabb értelemben, tehát az akárhány akárhány-változós művelettel ellátott kételemű halmazokat (Post, 1941). El tudjuk dönteni, hogy egy véges alaphalmazú struktúra hiperaktív-e (Rosenberg, 1965). Végül (de nem utolsósorban, mivel ez volt az algebra legnagyobb teljesítménye évszázadunkban) ismerjük mindazokat a struktúrákat, amelyek véges alaphalmazú egyszerű csoportok (sok matematikus részben egyéni, részben együttes munkája 1950 és 1980 között, 19. századi – még Galois által kezdett – alapvető kutatásokra támaszkodva).

Csákány Béla, József Attila Tudományegyetem, Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.