nyezhet, mert e réven a tanár az oktatásba intenzíven belevonhatja a tanulókat is, s így egy-egy tanóra lefolyásába eleven lüktetést vihet, a tanuló pedig nem „elefántcsonttoronyszerű" tüneményt látna tanárában, hanem saját munkatársát, aki őt nem új dolgok közlésével kínozza, hanem vele a dolgokat közelebbről megtárgyalja.

Szeged, 1964. november 24.

POLYGON
X. köt. 2. szám 2000. nov.

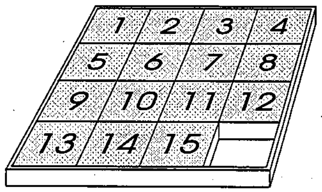
Rédei László utolsó dolgozatáról

CSÁKÁNY BÉLA

Rédei László matematikai munkásságának vezérelve volt az *elegancia*. Ez a szó a köznapi életben választékos ízlésességet jelent; a matematikusok rendszerint a tömör, szép gondolatmenetet nevezik elegánsnak. Élete utolsó cikkében is az elegáns bizonyítást kereste és találta meg Rédei. Ebben az ismert *tizenötös játék* alaptételét (pontosabban, ennek a nehezebbik felét) bizonyította be összesen nyolc sorban, felhasználva egy nem közismert segédtételt és egy egyszerű ábrát. További nyolc sorban elfért az alaptétel és a segédtétel kimondása, az utóbbihoz szükséges magyarázattal együtt. Hogy Rédei éppen egy játékról írta legutolsó cikkét, talán nem meglepő, tudva, hogy mindig szerette a játékot, e szó mindkét, leggyakrabban használt értelmében. Középiskolai diákja, Illésy István említi, hogy mezőtúri évei alatt szívesen játszott gitáron [4]. Szegedi és budapesti tanítványai pedig tudják, hogy a sakkjáték iránti vonzalma élethosszig tartott.

Rédei angol nyelven tette közzé gondolatmenetét a tizenötös játékot ismerő és a permutációkkal való számolásban jártas olvasók számára [3]. A továbbiakban a részleteket kibontva megpróbáljuk minden érdeklődő részére hozzáférhetővé tenni ezt a kis gyöngyszemet, Rédei László gazdag szellemi hagyatékának apró, de csillogó darabját.

A tizenötös játékot egy évszázaddal a Rubik-kocka előtt tette világszerte népszerűvé *Sam Loyd*, a híres amerikai rejtvénycsináló, akit a sakkozók klasszikus feladványszerzőként ismernek. A játék eszköze egy 4×4-es méretű lapos doboz, amelyben tizenöt, 1-től 15-ig számozott, 1×1-es méretű lapocska tologatható, mindig az egyetlen üres helyre. A lapocskákat a játék megkezdése előtt valahogyan elrendezik — ehhez akár ki is szedhetők a dobozból —, s a feladat: tologatással létrehozni az alapállást, amelyben a lapocskák számai balról jobbra és felülről lefelé haladva növekvő sorrendben vannak:



1. ábra

Sam Loyd ezer dollárt ígért annak, aki a feladatot megoldja abból a kezdő elrendezésből, amelyben 14 és 15 fel van cserélve, a többi szám pedig alapállásbeli helyén áll. Ez a speciális feladat, ellentétben a Rubik-kocka színreforgatásával, megoldhatatlan. Néhány évi világméretű „aranyláz” után Johnson és Story amerikai matematikusok tették közhírré az ügy reménytelenségét. A játékszer azonban játékboltokban ma is kapható, és a megoldható állások megoldása ma is szórakoztató. A nagy kérdés: melyek a megoldható állások? Általánosabban: mely állások alakíthatók át egymásba a játék szabályai szerint, azaz tologatással? Dolgozatában Rédei László megadja és bebizonyítja az átalakíthatóság elegendő feltételét. Ezt a bizonyítást próbáljuk közérthetővé tenni. A feltétel szükséges is, aminek igazolása könnyű; Rédei nem is foglalkozik vele. Cikkünk végén röviden rámutatunk, min múlik a szükségesség.

Először idézzünk fel néhány, permutációkra vonatkozó elemi fogalmat és tényt. Permutáción itt adott sorrendbe állított végesszámú elem más sorrendbe rakását értjük. Ha pl. az adott sorrend 12345, akkor e számoknak a 25143 sorrendbe rakása egy permutáció. Ha az eredeti sorrend rögzített, akkor ezt a permutációt természetesen megadhatjuk úgy, hogy csak a 25143 sorrendet írjuk fel; ezért a sorrendeket is szokás permutációknak nevezni. Végül, a más sorrendbe rakás felfogható a halmaz önmagára való kölcsönösen egyértelmű (röviden: bijektív) leképezéseként, pl. esetünkben 25143 azt a leképezést jelenti, amelynél 1-nek 2, 2-nek 5, stb. felel meg. Permutáción leggyakrabban ilyen leképezést értünk. Ennek az az előnye, hogy a permutációk csoportelemekként kezelhetők, hiszen halmaz összes önmagára való bijektív leképezései csoportot alkotnak. Beszélhetünk tehát permutációk szorzatáról és inverzéről, ezen az egymás utáni elvégzésükkel, ill. a visszacsinálásukkal megvalósított permutációt értve.

Transzpozíció az olyan permutáció, amely két elemet cserél fel, a többit változatlanul hagyja. Ha az a és b elemeket cseréli fel, jelölése (ab) (vagy (ba)). Az $123\dots n$ alapsorrendből az $1,2,3,\dots,n$ számok minden permutációja előáll transzpozíciók egymás utáni elvégzésével, azaz transzpozíciók szorzataként. Adott permutációt többféle módon is előállíthatunk így, de az előállításához elvégzett transzpozíciók számának párossága mindig ugyanaz. Ennek megfelelően beszélünk páros és páratlan permutációkról. Bármely véges halmaz összes páros permutációi is csoportot alkotnak. Ezt a halmaz alternáló csoportjának (másképpen: a halmaz feletti alternáló csoportnak) nevezzük.

Ha egy permutáció pontosan három elemet cserél fel, akkor 3-ciklusnak nevezzük. Ha az a, b, c elemeket úgy cseréli fel, hogy a helyébe b, b helyébe c (és így c helyébe a) kerül, akkor jelölése (abc) (vagy (bca), vagy (cab)). Minden 3-ciklus páros permutáció, mert $(abc) = (ab)\cdot(ac)$ (a szorzásjelet a továbbiakban nem írjuk ki). Másrészt minden páros permutáció előáll 3-ciklusok szorzataként. Ennek a belátásához elég észrevenni, hogy két különböző transzpozíció szorzata mindig vagy egyetlen 3-ciklussal vagy két 3-ciklus szorzatával egyenlő. Ha a két transzpozíció tartalmaz (azaz mozdít) közös elemet, akkor ezt a legutóbbi formula mutatja. Különben pedig $(ab)(cd) = (ab)(ad)(ad)(cd) = (abd)(acd)$. A most igazolt tényt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy halmaz összes 3-ciklusai generálják a halmaz alternáló csoportját.

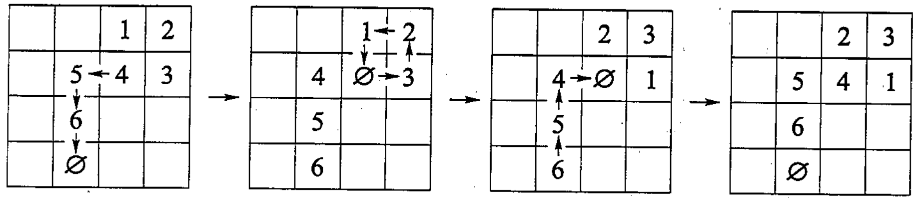
Ennyi előkészület után következhet a segédtétel, a tétel és a bizonyítás úgy, ahogyan Rédei dolgozatában áll:

Segédtétel. *3-ciklusok bármely összefüggő rendszere generálja az ezen 3-ciklusok által permutált elemek halmazának alternáló csoportját. (Legyenek $K_1, K_2, \dots, K_r$ azok a három elemű halmazok, amelyeket a tekintett 3-ciklusok permutálnak; ezeket összefüggő rendszernek nevezzük, ha nem létezik olyan K halmaz, amelyre $\emptyset \subset K \subset \bigcup_{k=1}^{r} K_i$, és minden i-re, ahol $i = 1,2,\dots,r$, vagy $K_i \subseteq K$ vagy $K_i \cap K = \emptyset$ teljesül.)*

Tétel. *Ha a tizenötös játék két olyan állása, melyekben ugyanaz a hely üres, a számok páros permutációjával megkapható egymásból, akkor ezek az állások a játék szabályai szerint is átalakíthatók egymásba.*

Bizonyítás. Tekintsük a 2×2-es négyzeteket, és mindegyikből hagyjuk ki az adott állások üres mezőjéhez legközelebbi számot. Megmutatjuk, hogy az ott maradó három számot permutáló 3-ciklus megvalósítható a játék szabályai szerint.

Valóban, először mozgassuk az üres mezőt az adott 2×2-es négyzet kihagyott mezőjére a legrövidebb úton, aztán permutáljuk ciklikusan az ott lévő három számot, végül mozgassuk vissza az üres mezőt eredeti helyére. Például:



2. ábra

Ezek a 3-ciklusok nyilvánvalóan összefüggő rendszert alkotnak, és mind a tizenöt számot permutálják. Ezért a segédtétel alapján a bizonyítás kész.

Érezhető, hogy a bizonyítás „nehézségei” a segédtételbe vannak sűrítve. A segédtételt Rédei nem bizonyítja, csupán hivatkozik Sophie Piccard [2] könyvére, amely a segédtételt valóban tartalmazza, ám ugyancsak nem bizonyítja, arra hivatkozva, hogy *jól ismert* tény. Nincs jogunk ezt kétségbe vonni, de az is igaz, hogy nem *közismert*. Bizonyítása ugyan nem nehéz, de nem is nyilvánvaló. Ezért be fogjuk látni a segédtételt. Ezt az összefüggőség átfogalmazásával kezdjük. Az átfogalmazás arra is rámutat, miért használhatja Rédei a „nyilvánvalóan” szót bizonyításának utolsó előtti mondatában.

Legyen H az $\mathbf{n} = \{1,2,\dots,n\}$ halmaz 3-ciklusainak egy olyan halmaza, hogy $\mathbf{n}$ minden eleme benne van legalább egy H-beli ciklusban. H akkor és csak akkor összefüggő, ha $\mathbf{n}$ bármely i, j eleme összeköthető H-beli ciklusokból álló lánccal, azaz létezik 3-ciklusoknak olyan $C_1, \dots, C_k$ sorozata ($k \geq 1$), hogy

(1) $C_1, \dots, C_k \in H$,

(2) $i \in C_1,\ j \in C_k$,

(3) a sorozatban egymás mellett lévő ciklusoknak van közös eleme.

Ha ugyanis H nem összefüggő, akkor $\mathbf{n}$-nek van olyan K részhalmaza, hogy K bizonyos H-beli ciklusok egyesítése, $\mathbf{n} \setminus K$ pedig a többi H-beli ciklusok elemeinek egyesítése. Válasszunk egy i elemet K-ból és egy j-t K-n kívülről. Akkor ez az i és j biztosan nem köthető össze az (1)—(3) feltételeknek eleget tevő lánccal.

Ha viszont vannak olyan $i, j \in \mathbf{n}$, amelyek nem köthetők össze a kívánt tulajdonságú lánccal, akkor tekintsük — és nevezzük K-nak — $\mathbf{n}$ mindazon elemeinek halmazát, amelyek i-vel *ilyen* lánccal összeköthetők. Ez a halmaz bizonyos H-beli ciklusok elemeinek egyesítése, a többi H-beli ciklusok elemei pedig mind K-n kívül vannak. Ez mutatja, hogy H nem összefüggő.

Most bebizonyítjuk a segédtételt. Láttuk, hogy 3-ciklusok szorzataként minden páros permutáció előáll, ezért elegendő a következőt megmutatnunk: Ha H 3-ciklusok összefüggő halmaza az $\mathbf{n}$ halmazon, akkor H-beli ciklusok szorzataként az $\mathbf{n}$ halmaz minden 3-ciklusa megkapható. A továbbiakban $[H]$ fogja jelölni $\mathbf{n}$ mindazon permutációinak halmazát, amelyek előállnak H-beli ciklusok szorzataként.

Először vegyük észre, hogy ha a és b az $\mathbf{n}$ halmaz *rögzített* különböző elemei, akkor (abc) alakú ciklusokból (ahol $c \in \mathbf{n}$) szorzással $\mathbf{n}$ minden 3-ciklusát elő tudjuk állítani. Valóban, a és b helyett az egyszerűség kedvéért 1-et és 2-t írva, tetszőleges $k, l, m \in \mathbf{n}$ elemekre ellenőrizhető

$$(klm) = (12l)(12k)(12l)^2(12k)(12m)(12k)^2.$$

Az $\mathbf{n}$ halmaz elemeit szükség esetén átjelölve elérhető, hogy $(123) \in H(\subseteq [H])$. Ha emellett $(124), \dots, (12n) \in [H]$ is igaz, akkor az előző formula mutatja, hogy $[H]$ valóban tartalmaz minden 3-ciklust.

Tegyük fel, hogy ez nem így van, és legyen m a legkisebb olyan pozitív egész, amelyre $(12m) \notin [H]$. Ekkor természetesen $m \geq 4$. Még azt is feltehetjük, hogy $(12q) \notin [H]$ minden m-nél nagyobb q-ra; ez az $m, m{+}1, \dots, n$ elemeket szükség esetén átjelölve megint csak elérhető. Mivel H összefüggő, az 1 elem az $m, m{+}1, \dots, n$ elemek mindegyikével összeköthető 3-ciklusok olyan láncával, amelyre teljesül (1)—(3). Legyen $C_1, \dots, C_k$ a legrövidebb az összes ilyen láncok közül, és legyen ebben a láncban C_h az első olyan ciklus, amely tartalmazza $m, m+1, \dots, n$ valamelyikét. Két eset fordulhat elő: C_h-ban vagy egy, vagy két elem van az $m, m-1, \dots, n$ elemek közül. Szükség esetén ismét megváltoztatva a jelölést, feltehetjük, hogy ezek egyike m.

Az első esetben $C_h = (ijm)$, ahol $i, j < m$. Ha emellett $i, j > 2$, tekintsük a

$$\pi = (12i)(12j)(12i)(12j)^2(12i)$$

permutációt. Vegyük észre, hogy $\pi \in [H]$ és $\pi = (1i)(2j)$. Ekkor $\pi(ijm)\pi = (12m)$ és a bal oldal $[H]$-ban van, mert minden tényezője $[H]$-ban van. Ezért $(12m) \in [H]$; ellentmondás. Most tegyük fel, hogy pl. $i = 1$, azaz $C_h = (1jm)$. Ha $k < m$, $k \neq 2, j$, akkor $(k2j), (kj2)(= (k2j)^2) \in [H]$, ezért $(k2j)(1jm)(kj2) = (12m) \in [H]$; megint ellentmondás. Hasonlóan jutunk ellentmondásra a további alesetekben ($i = 2$, $j = 1$ vagy 2) is.

A második esetben legyen $C_h = (kmq)$, ahol $k < m < q$, és legyen a tekintett láncban az előző ciklus — azaz C_{h-1} — az (ijk) $(i, j, k < m)$. Az első esetben bevezetett π-re teljesül $\pi(kmq)^2(ijk)(kmq)\pi = (12m)$. A baloldal itt is $[H]$-beli elemek szorzata, ahonnan a már-már megszokott $(12m) \in [H]$ ellentmondást nyerjük, és ez be is fejezi a segédtétel bizonyítását.

Magának a tételnek a bizonyításához a következőket fűzhetjük. A tizenötös játékban az üres hely 16-féleképpen helyezkedhet el, de a négyzet szimmetriái miatt csak három lényegesen különböző eset van: az üres hely vagy belső négyzet, vagy saroknégyzet, vagy egyik sem. A ciklikusan permutálandó számhármasok mindegyik esetben egy-egy L-trominót (szomszédos négyzetekből álló L alakú hármast) foglalnak el, összesen kilencet. A tétel bizonyításában tekintett 3-ciklusok rendszerének összefüggősége a látott átfogalmazás alapján azt jelenti, hogy mind a három esetben bármelyik nemüres négyzetből bármelyik másikba el lehet jutni egymásba kapcsolódó — azaz közös négyzettel rendelkező — L-trominók alkalmas sorozatán „végigsétálva". Ezt nem nehéz ellenőrizni.

Végül néhány szó a tételben szereplő feltétel szükségességéről. Ez azt jelenti, hogy ha két állás, amelyekben ugyanaz a hely üres, tologatással átalakítható egymásba, akkor a számok páros permutációjával kaphatók meg egymásból. Tologatás közben az üres hely vagy vízszintesen mozdul el, és akkor a számok sorrendje nem változik, vagy pedig függőlegesen, és akkor a számok sorrendjének megváltozása három egymás utáni transzpozícióval is megvalósítható (ellenőrizzük!). Ha egy tologatás-sorozat végén ugyanaz a hely üres, mint az elején, akkor páros számú alkalommal mozdult el az üres hely függőlegesen, ti. ugyanannyiszor mozdult felfelé, mint lefelé. (Hasonló igaz az üres hely vízszintes elmozdulásaira is, de ennek nincs jelentősége.) Tehát ilyenkor a számok sorrendjének megváltozása összesen páros számszor 3 transzpozícióval, vagyis páros permutációval érhető el. Ez az egyszerű gondolatmenet azt is mutatja, hogy Loyd nevezetes feladványa megoldhatatlan.

A tizenötös játék alaptételére mindmáig számos különböző bizonyítás látott napvilágot könyvekben és cikkekben (lásd pl. a legutóbbi [1] cikket). Ezek rendszerint hosszadalmasak, ami nem is hiba, hiszen szerzőik nagy ötlet híján aprólékosan kidolgozzák a részleteket. Rédei László frappáns bizonyításához hasonló eleganciával a tizenötös játék irodalmában másutt nem találkozunk!

IRODALOM

[1] Archer, A. F., A modern treatment of the 15 puzzle, *American Mathematical Monthly*, **106**(1999), 793—799.

[2] Piccard, S., *Sur les bases des groupes d'ordre fini*, Neuchatel, 1957.
[3] Rédei, L., On the mathematical theory of the "Fifteenth-Puzzle", *Acta Mathematica Acad. Sci. Hungar.*, **36**(1980), 123—124.
[4] Zsuffa Lajos (szerk.), *Rédei köri előadások 1988—90*, Tiszakécske, 1990.

Csákány Béla, SZTE Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1.

POLYGON
X. köt. 2. szám 2000. nov.

Rédei László „Megjegyzések K. Borsuk egyik geometriai tételéhez" című dolgozata

PINTÉR LAJOS

1932-ben a zürichi Nemzetközi Matematikai Kongresszuson K. Borsuk lengyel matematikus bebizonyította, hogy n-dimenziós gömböt n számú részhalmazra bontva, legalább egyik halmaz tartalmaz átellenes pontpárt, azaz legalább egyik halmaz átmérője megegyezik a gömb átmérőjével. Bizonyítása nem elemi, analízisbeli és topológiai eszközöket használt.

Rédei László ebben az időben Mezőtúron volt középiskolai tanár. Tudomást szerzett K. Borsuk eredményéről (ahogy cikkének lábjegyzetében írja, Veress Pál hívta fel erre a figyelmét), és már 1934-ben a Matematikai és Fizikai Lapokban közölt erről egy, tanítási szempontból különösen érdekes cikket. Ezt a dolgozatot a fiatal Erdős Pálnak is elküldte, akinek válaszlevelét érdekességként e cikk után közöljük.

Ebben a dolgozatban kis változtatással Rédei bizonyításai találhatók.

Borsuk tételében a halmazok határpontjai természetesen hozzátartoznak a megfelelő halmazokhoz. Így egy pont több halmazhoz is tartozhat. A fő problémát az okozza, hogy a határpontok halmaza nagyon komplikált lehet. Rédei, mint igazi tanár, először azt mondja, hogy tekintsük a háromdimenziós gömbbel kapcsolatban azt az esetet, ha a fellépő három halmaz összefüggő és a határaik Jordan görbék. Ez egy érdekes speciális eset, bizonyítását szó szerint idézzük Rédei cikkéből:

„A mondott esetben vagy van a három halmaznak közös határpontja, ekkor az állítás helyessége nyilvánvaló, vagy nincs ilyen határpont, ekkor könnyen látható, hogy a teljes határgörbe: két, közös pont nélküli zárt Jordan-görbe. Legyenek ezek c_1 és c_2 és legyenek az adott halmazok h_1, h_2, h_3; ezek határa alkalmas jelölésekkel c_1, c_2 és $c_1 + c_2$. Jelentse a felső vonás (h', P' stb.) az átellenes leképezést. Minthogy c_1 minden pontja határpontja h_1-nek és h_3-nak, azért az állítás helyessége nyilvánvaló, ha c_1'-nek akár h_1-gyel, akár h_3-mal van közös (belső vagy határ-) pontja. Elég tehát még azzal az esettel foglalkoznunk, amelyben c_1' a h_2 belsejében és ugyancsak c_2' a h_1 belsejében van. Legyen ekkor C_1' és C_2' a c_1' és c_2' görbéknek egy-egy pontja és legyen c egy összekötő (nyitott) Jordan-görbe C_1 és C_2 között a h_3 belsejében. Akkor c' összeköti a C_1', C_2' pontokat, amelyek h_2-ben, illetve h_1-ben vannak, tehát c'-nek van h_3-mal egy közös C' (belső) pontja. Azonban C is pontja h_3-nak, s ezzel a tételt a mondott esetre kimutattuk." (A jelölések is az eredetiek maradtak.)