Klónok

Az olvasó eddig eljutván bizonyára észrevette, hogy – ahogyan maguk is írják egy helyen – „a szerzők számára az univerzális algebra majdnem egyet jelent a varietások elméletével”. Ez természetes is: a nemtriviális univerzális algebra Birkhoff varietástételével (II. fejezet, **11.9**) kezdődött, s a kutatások nagyobb része ma is varietásokra irányul. Ez a szemlélet nincs ellentétben az algebra tulajdonképpeni céljával: rendszerezni az összes algebrákat. Egy algebra azonosságelméletének modelljeit – vagyis az algebra által generált varietást – vizsgálva, mélyebben megérthetjük az algebra viselkedését, hasonlóan ahhoz, hogy az embert is jobban megértjük, ha társadalmi környezetébe ágyazva közelítjük meg.

Kialakult azonban az univerzális algebrának egy olyan – ugyancsak nemtriviális – ága is, amely az egyes algebrát önálló individuumként vizsgálja, és más algebrákkal való kapcsolata helyett műveleteinek egymással, valamint a tartóhalmazán bevezethető relációkkal való összefüggéseit kutatja. Az univerzális algebra e fejezete a *klónok* elmélete. A klónok speciális művelethalmazok; nevük, a görög „klón” szó (jelentése: hajtás, ág, csemete) arra utal, hogy ezek a halmazok bizonyos generátorműveletekből „sarjadnak ki”.

Míg a varietások vizsgálatára, a kutatás belső logikáján túl, a modellelmélet és az absztrakt algebra egyes klasszikus ágai (a csoport-, gyűrű- és hálóelmélet) ösztönöznek, hasonló szerepet a klónokra vonatkozóan a többértékű logikák, valamint a számítástudomány matematikai alapjai játszanak. Ebben a fejezetben bevezetjük a klónok elméletének alapfogalmait és ismertetjük néhány nevezetes tételét, köztük e könyv egyik szerzőjének társszerzővel együtt bizonyított friss eredményét. Azt is látni fogjuk, hogy a klónok elmélete az univerzális algebra más fejezeteivel szoros kapcsolatban fejlődik.

1. Absztrakt klónok és függvényklónok

Az algebra kifejezésfüggvényeinek halmaza mindig tartalmazza az összes projekciófüggvényt, és zárt az összetett függvények képzésére nézve (l. II. fejezet, **10.2** definíció). Művelethalmazok e két tulajdonsága gyakran együtt fordul elő. Ez vezetett a következő definícióhoz, amely azt is figyelembe veszi, hogy az összetett függvények képzését célszerű nem egyetlen műveletnek, hanem műveletseregnek tekinteni egy adott halmazon értelmezett műveletek halmazán.

1.1. Definíció. Legyenek $A_0, \dots, A_i, \dots$ $(i<\omega)$ olyan halmazok, hogy mindegyik A_i tartalmaz bizonyos, e^i_j-vel jelölt $(1\le j\le i)$ elemeket (A_0 tehát üres is lehet), és minden $\langle n, k\rangle$ $(n, k < \omega)$ párra értelmezve vannak a $C^n_k\colon A_n\times(A_k)^n\to A_k$ leképezések, melyek eredményét az $\langle s, t_1, \dots, t_n\rangle$ elem-$(n+1)$-esen $C^n_k(s, t_1, \dots, t_n)$ helyett röviden $s(t_1, \dots, t_n)$-nel is jelöljük, és amelyekre az

(I) $s(e^n_1, \dots, e^n_n) \approx s,$

(II) $e^n_i(t_1, \dots, t_n) \approx t_i,$

(III) $(s(t_1, \dots, t_n))(u_1, \dots, u_k) \approx s(t_1(u_1, \dots, u_k), \dots, t_n(u_1, \dots, u_k))$

egyenletek érvényesek, bármely $s\in A_n$, $t_i\in A_k$ $(i=1, \dots, n)$ és $u_j\in A_k$ $(j=1, \dots, k)$ esetén. A kapott

$$\mathbf{A} = \langle\{A_i\colon i<\omega\}, \{e^i_j\colon 1\le j\le i<\omega\}, \{C^n_k\colon n, k < \omega\}\rangle$$

rendszert *absztrakt klónnak* – röviden *klónnak* – nevezzük.

A_i az $\mathbf{A}$ absztrakt klón *i aritású* (vagy *i változós*) elemeinek halmaza, az e^i_j elemek *projekciók* (közelebbről, e^i_j a j-edik, i aritású projekció), a C^n_k leképezések a *kompozíciók*.

Mivel absztrakt klónban a projekciókat és a kompozíciókat általában mindig e^i_j, ill. C^n_k jelöli (hasonlóan ahhoz, ahogy pl. csoport egységelemét általában az 1 jellel, műveletét pedig szorzásjellel jelöljük), egy $\mathbf{A}$ absztrakt klón megadásakor rendszerint csak az $\{A_i\colon i<\omega\}$ halmazrendszert írjuk fel.

Ha az $\mathbf{A}$ klónhoz van olyan $1\le i<j\le n$, hogy $e^n_i = e^n_j$, akkor bármely $k<\omega$-ra és $s, t\in A_k$-ra (II) szerint $s = e^n_i(\dots, s, \dots, t, \dots) = e^n_j(\dots, s, \dots, t, \dots) = t$, azaz $0<k<\omega$-ra A_k-nak egyetlen ($k=0$-ra pedig legfeljebb egy) eleme van. Ilyenkor $\mathbf{A}$ *elfajuló klón*.

Példa. Olyan klónt mutatunk, amelynek elemei nem műveletek. Legyen

$$X_j = \{x_i\colon 0<i<j\}, \qquad (j<\omega)$$

és

$$X_\omega = \{x_i\colon 0<i<\omega\}.$$

Ekkor az X_ω feletti $\mathscr{F}$ típusú kifejezések $T(X_\omega)$ halmazán (II. fejezet, **10.1** definíció) minden $\langle n, k\rangle\in\omega^2$ párra értelmezhetjük az $\langle n, k\rangle$-kompozíciót, ame-

lyet C^n_k-val jelölünk, és amely a $T(X_n)\times(T(X_k))^n$ szorzathalmazt $T(X_k)$-ba képezi le a következő módon: bármely

$$s = s(x_1, \dots, x_n)\in T(X_n)$$

és

$$t_i = t_i(x_1, \dots, x_k)\in T(X_k) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

kifejezésekre legyen

$$C^n_k(s, t_1, \dots, t_n) = s(t_1(x_1, \dots, x_k), \dots, t_n(x_1, \dots, x_k)),$$

ahol $s=x_i$ $(i\le n)$ esetén

$$s(t_1, \dots, t_n) = t_i,$$

$s=f_0\in\mathscr{F}_0$ esetén

$$s(t_1, \dots, t_n) = f_0,$$

míg $s = f(p_1, \dots, p_m)$ esetén, ahol $f\in\mathscr{F}_m$; $p_i\in T(X_n)$ $(i = 1, \dots, m)$,

$$s(t_1, \dots, t_n) = f(p_1(t_1, \dots, t_n), \dots, p_m(t_1, \dots, t_n))$$

(vö. II. fejezet, **10.1**). Mivel az

$$s(x_1, \dots, x_n) \approx s,$$
$$x_i(t_1, \dots, t_n) \approx t_i,$$
$$(s(t_1, \dots, t_n))(u_1, \dots, u_k) \approx s(t_1(u_1, \dots, u_k), \dots, t_n(u_1, \dots, u_k))$$

egyenletek érvényesek minden $s\in T(X_n)$, $t_1, \dots, t_n\in T(X_k)$ és $u_1, \dots, u_k\in T(X_l)$ kifejezésre, így

$$\{T(X_0)=\mathscr{F}_0, T(X_1), \dots, T(X_i), \dots\}$$

absztrakt klón. Ezt a klónt az $\mathscr{F}$ *típusú kifejezések klónjának* nevezzük.

A továbbiakban kiderül, hogy lényegében minden klón műveletekből álló klón (ugyanúgy, ahogyan minden csoport lényegében permutációcsoport). Ez adja meg a következő fogalom fontosságát:

1.2. Definíció. Ha C a nemüres M halmazon értelmezett műveletek olyan halmaza, amely

I) minden n természetes számra tartalmazza az összes n-változós projekciókat;

II) bármely hozzá tartozó n-változós s és k-változós $t_1, \dots, t_n$ művelettel együtt tartalmazza az

$$\langle m_1, \dots, m_k\rangle \mapsto s(t_1(m_1, \dots, m_k), \dots, t_n(m_1, \dots, m_k))$$

által definiált $s(t_1, \dots, t_n)$ műveletet is, akkor azt mondjuk, hogy *C függvényklón* (vagy *műveletklón*) az M halmazon.

A definíciót röviden úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a C művelethalmaz függvényklón, ha tartalmazza az összes projekciókat és zárt az összetett függvények képzésére nézve.

A függvényklónok mind absztrakt klónok. Ha ugyanis C függvényklón, akkor e_k^i-nak az i-változós k-adik projekciót tekintve, C_k^n-t pedig az n-változós külső függvényből és k-változós belső függvényekből összetett függvény képzéseként értelmezve látjuk, hogy az I)–III) egyenletek korlátlanul érvényesek. Amikor hangsúlyozni kívánjuk a C művelethalmaz klón jellegét, akkor azt rendszerint **C**-vel jelöljük.

Példák. 1. A nemüres M halmazon értelmezhető összes műveletek függvényklónt alkotnak; hasonlóképpen az összes projekciók is. Ezek a *triviális klónok*. Jelölésük rendre $\mathbf{O}_M$, ill. $\mathbf{E}_M$.

2. Bármely **A** algebra összes kifejezésfüggvényei függvényklónt alkotnak; hasonlóképpen **A** összes polinomjai is. Jelölésük rendre $\mathbf{T}_\mathbf{A}$, ill. $\mathbf{P}_\mathbf{A}$.

3. Legyen f (n-változós) művelet, r pedig (k-változós) reláció az M halmazon. Azt mondjuk, hogy f *tiszteli* az r relációt, ha bármely $a_{ij} \in M$-re ($i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, k$)

$$\langle a_{11}, \ldots, a_{n1}\rangle, \ldots, \langle a_{1k}, \ldots, a_{nk}\rangle \in r \Rightarrow \langle f(a_{11}, \ldots, a_{1k}), \ldots, f(a_{n1}, \ldots, a_{nk})\rangle \in r.$$

Az összes olyan műveletek M-en, amelyek az r relációt tisztelik, függvényklónt alkotnak (jelölése: Pol r). Speciálisan, ha $\leq$ M-nek részbenrendezése, a $\leq$-re nézve monoton műveletek Pol $\leq$ halmaza függvényklón.

4. A folytonos (véges változós) valós függvények függvényklónt alkotnak.

Az összetett függvények képzésén kívül van néhány további egyszerű eljárás, adott műveletekből további műveletek létrehozására.

1) *A változók átrendezése.* Ha f n-változós művelet ($n > 0$) és π az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja, akkor legyen $f_\pi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$.

2) *A változók azonosítása.* Ha f n-változós művelet ($n > 0$), akkor legyen $(\Delta f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Ismeretes, hogy egy n-elemű halmaz összes permutációi és a halmaz egy olyan leképezése önmagába, melynek értékkészlete $n-1$ elemű, együttesen az adott halmaz önmagába való leképezéseinek teljes félcsoportját generálják. Ezért, ha τ az $\{1, \ldots, n\}$ tetszőleges leképezése önmagába, az $f(x_1, \ldots, x_n)$ műveletből az $f_\tau(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)})$ művelet megkapható a változók megfelelő átrendezésével és azonosításával. Ilyenkor az f_τ műveletet az f *polimerjének* nevezzük; ha τ nem permutáció, akkor f_τ az f *valódi* polimerje.

Legyen $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ művelet az M halmazon. Azt mondjuk, hogy x_i *lényeges változója f-nek,* ha vannak olyan $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b, c \in M$, hogy $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Az ellenkező esetben az f művelet eredménye nem függ x_i értékétől; ilyenkor x_i *fiktív változója* f-nek.

3) *Kiegészítés fiktív változóval.* Ha f n-változós művelet, legyen $(\nabla f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n)$. (Ekkor x_{n+1} fiktív változója ∇f-nek.)

4) *Behelyettesítés.* Ha g és f m-, ill. n-változós ($n > 0$), akkor legyen $(f*g)(x_1, \ldots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$.

A függvényklónokból az 1) – 4) eljárások nem vezetnek ki, mivel mind visszavezethetők összetett függvény képzésére az adott műveletekből és projekciókból; utóbbiakat most is e_k^i-vel jelölve, pl. $\nabla f = C_{n+1}^n(f, e_1^{n+1}, \ldots, e_n^{n+1})$. Fordítva, az összes projekciók megkaphatók az identikus leképezésből fiktív változókkal való kiegészítés és a változók átrendezése útján, továbbá az összetett függvény képzése mindig elérhető a változók átrendezése és azonosítása, valamint a behelyettesítés néhányszori alkalmazásával. Például

$$f(g(x_1, x_2), h(x_1, x_2), k(x_1, x_2)) = (((f_\pi * k)_\pi * h)_\varrho * g)_\tau,$$

ahol $\pi = (13)$, $\varrho = (15)$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Érvényes tehát:

1.3. Tétel. Adott halmazon értelmezett műveletek egy halmaza akkor és csak akkor függvényklón, ha tartalmazza az identikus leképezést, zárt a változók átrendezésére és azonosítására, a fiktív változóval való kiegészítésre és a behelyettesítésre nézve. □

Az izomorfizmus fogalma természetes módon bevezethető klónokra is.

1.4. Definíció. Az $\mathbf{A} = \{A_i : i < \omega\}$ és $\mathbf{B} = \{B_i : i < \omega\}$ klónok *izomorfok* (jelölés: $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$), ha minden $i < \omega$-ra létezik olyan $\alpha_i : A_i \to B_i$ bijekció, hogy

1) minden $\langle i, j\rangle$ ($1 \leq j \leq i < \omega$) párra $\alpha_i e_j^i = e_j^i$ ($\in B_i$), és

2) bármely $f \in A_n$, $g_1, \ldots, g_n \in A_k$ elemekre

$$C_k^n(\alpha_n f, \alpha_k g_1, \ldots, \alpha_k g_n) = \alpha_k C_k^n(f, g_1, \ldots, g_n).$$

Bijekciók ilyen $\{\alpha_i : i < \omega\}$ halmazának neve: **A**-*nak* **B**-*re való izomorfizmusa.*

Megmutatjuk, hogy lényegében minden klón függvényklón:

1.5. Tétel. Minden klón izomorf egy függvényklónnal.

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\mathbf{A} = \{A_i : i < \omega\}$ klónt. Megalkotunk egy A halmazt, és rajta egy függvényklónt, amely izomorfnak bizonyul **A**-val. Nevezzük $A = \bigcup\{A_i : i < \omega\}$ egy L részhalmazát *láncnak,* ha $a_i \in A_i \cap L$, $i \leq j$ esetén $A_j \cap L$ egyetlen eleme $a_i(e_1^j, \ldots, e_i^j)$.

A definíció korrekt, mert ha $i \leq j \leq k$ és $a_i \in A_i \cap L$, $a_j \in A_j \cap L$, $a_k \in A_k \cap L$, akkor egyrészt $a_k = a_i(a_1^k, \ldots, a_i^k)$, másrészt $a_k = a_j(a_1^k, \ldots, a_j^k) = (a_i(e_1^j, \ldots, e_i^j))(a_1^k, \ldots, a_j^k)$, és itt a jobb oldalak az **1.1**-beli (II) és (III) miatt egyenlők. Vegyük észre, hogy (I) miatt $|A_i \cap L| \leq 1$ minden i-re, továbbá van olyan $k < \omega$, hogy $|A_i \cap L| = 1$ akkor és csak akkor, ha $i \geq k$. Jelöljük $\bar{a}$-sal az a ($\in A$) elemet tartalmazó láncot és legyen $\bar{A}$ az összes láncok halmaza.

Legyen $f \in A_n$; definiáljuk $\bar{A}$-on az f^* n-változós műveletet a következőképpen. Ha $\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^n \in \bar{A}$, akkor van olyan $t < \omega$ és $a_{t1}, \ldots, a_{tn} \in A_t$, hogy

$$\bar{a}^1 = \overline{a_{t1}}, \ldots, \bar{a}^n = \overline{a_{tn}}.$$

Legyen $f^*(\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^n) = \overline{f(a_{t1}, \ldots, a_{tn})}$. Mivel $|\bar{a}^i \cap A_k| = 1$ miatt az a_{ki} elemet a^i egyértelműen meghatározza, annak belátásához, hogy f^* e definíció által egyértelműen meg van adva, elég igazolnunk, hogy $k \leq l$ és $\overline{a_{ki}} = \overline{a_{li}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ esetén

$$\overline{f(a_{k1}, \ldots, a_{kn})} = \overline{f(a_{l1}, \ldots, a_{ln})}.$$

A feltevés azt jelenti, hogy $a_{li} = a_{ki}(e_1^l, \ldots, e_k^l)$; innen **1.1** (III) szerint

$$\begin{aligned} f(a_{l1}, \ldots, a_{ln}) &= f(a_{k1}(e_1^l, \ldots, e_k^l), \ldots, a_{kn}(e_1^l, \ldots, e_k^l)) = \\ &= f(a_{k1}, \ldots, a_{kn})\,(e_1^l, \ldots, e_k^l), \end{aligned}$$

ami az igazolandó egyenlőséget jelenti. Megmutatjuk, hogy $A^* = \{f^* : f \in A\}$ függvényklón és az $\alpha_n : f \mapsto f^*(n < \omega)$ leképezések **A**-nak **A***-ra való izomorfizmusát alkotják.
Definíció szerint

$$(\alpha_n(e_i^n))\,(\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^n) = (e_i^n)^*\,(\bar{a}^1, \ldots; \bar{a}^n) = e_i^n(a_{t1}, \ldots, a_{tn}) = \bar{a}_{ti} = \bar{a}^i.$$

Így A^* tartalmazza az összes projekciókat, és az α_n leképezések kielégítik 1)-et az izomorfizmus definíciójában. Továbbá, ha $g_1, \ldots, g_n \in A_k$, $\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^k, \in \bar{A}$ és $t < \omega$, $a_{t1}, \ldots, a_{tk}$ olyan hogy $\bar{a}^i = \bar{a}_{ti}$, akkor

$$\begin{aligned} &(\alpha_k C_k^n(f, g_1, \ldots, g_n))\,(\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^k) = \\ &= (f(g_1, \ldots, g_n))^*\,(\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^k) = \\ &= \overline{(f(g_1, \ldots, g_n))\,(a_{j1}, \ldots, a_{jk})} = \\ &= \overline{f(g_1(a_{j1}, \ldots, a_{jk}), \ldots, g_n(a_{j1}, \ldots, a_{jk}))} = \\ &= f^*(\overline{g_1(a_{j1}, \ldots, a_{jk})}, \ldots, \overline{g_n(a_{j1}, \ldots, a_{jk})}) = \\ &= f^*(g_1^*(\bar{a}_{j1}, \ldots, \bar{a}_{jk}), \ldots, g_n^*(\bar{a}_{j1}, \ldots, \bar{a}_{jk})) = \\ &= (C_k^n(\alpha_n f, \alpha_k g_1, \ldots, \alpha_k g_n))\,(\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^k), \end{aligned}$$

tehát A^* zárt az összetett függvények képzésére nézve, és az α_n leképezések 2)-t is kielégítik az izomorfizmus definíciójában. Végül, α_n kölcsönösen egyértelmű minden n-re; ha ugyanis $f_1, f_2 \in A_n$, és $\alpha_n f_1 = \alpha_n f_2$, azaz $f_1^* = f_2^*$, akkor

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \overline{f_1(e_1^n, \ldots, e_n^n)} = \\ &= f_1^*(\bar{e}_1^n, \ldots, \bar{e}_n^n) = f_2^*(\bar{e}_1^n, \ldots, \bar{e}_n^n) = \\ &= \overline{f_2(e_1^n, \ldots, e_n^n)} = \bar{f}_2, \end{aligned}$$

ahonnan következik $f_1 = f_2$. □

Az olyan algebrai alapfogalmak, mint részalgebra, generátorrendszer, homomorfizmus, faktoralgebra, bevezethetők klónokra is, és felhasználhatók a klónokkal kapcsolatos vizsgálatokban.

Az $\mathbf{A} = \{A_i : i < \omega\}$ klónnak $\{B_i : i < \omega\}$ zárt részhalmazrendszere, ha $e_k^i \in B_i$ minden $1 \leqq k \leqq i < \omega$-ra, és $C_k^n(f, g_1, \ldots, g_n) \in B_k$, valahányszor $f \in B_n$, $g_1, \ldots$ $\ldots, g_n \in B_k$. Ilyenkor $\mathbf{B} = \{B_i : i < \omega\}$ maga is klón: projekciói ugyanazok, mint **A** projekciói, kompozíciói pedig **A** megfelelő kompozícióinak megszorításai. Az

A-ból így keletkező klónokat az **A** *részklónjainak* nevezzük. Ha **B** az **A** részklónja és $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$, akkor **B** az **A** *valódi részklónja.*

Ha **A** klón, legyen bármely $X \subseteq \bigcup_{i<\omega} A_i$ halmazra

$$\begin{aligned} \mathrm{Cg}(X) = \{\textstyle\bigcap\{B_i : X \cap A_j \subseteq B_j\,(j < \omega) \text{ és } \{B_j : j < \omega\} \\ \text{zárt részhalmazrendszere } \mathbf{A}\text{-nak}\} : i < \omega\}. \end{aligned}$$

Cg(X)-et az **A** *X által generált zárt részhalmazrendszerének* nevezzük. Ha $\mathrm{Cg}(X) = A$, azt mondjuk, hogy *X generálja* **A**-*t* (vagy: *X generátorrendszere* **A**-*nak*). Belátható, hogy Cg algebrai lezárási operátor.

Valóban, **A** helyett tekintsünk egy vele izomorf **B** függvényklónt; az izomorfizmus során **A** zárt részhalmazrendszereinek **B** olyan részhalmazai felelnek meg, amelyek maguk is függvényklónok. Az **1.3** tétel szerint ezek **B** olyan részhalmazai, melyek zártak egy kétváltozós műveletre (behelyettesítés) és néhány egyváltozós műveletre (változók átrendezései stb.) nézve. Most állításunk a II. fejezet **3.2** tételéből következik. Innen nyerjük, hogy bármely **A** klón zárt részhalmazrendszerei algebrai hálót alkotnak.

Az utóbbi tény az algebrák esetéhez hasonlóan is igazolható klónokra. Ha $X \subseteq \mathbf{A}$ és P a projekciók halmaza **A**-ban, legyen

$$\begin{aligned} E(X) &= X \cup \{C(a, b_1, \ldots) : C \text{ kompozíció } \mathbf{A}\text{-n és } a, b_1, \ldots \in X\} \\ E^{-1}(X) &= P, \\ E^0(X) &= X, \\ E^{n+1}(X) &= E(E^n(X)) \quad (n < \omega). \end{aligned}$$

Ekkor

$$\mathrm{Cg}(X) = \bigcup\{E^i(X) : -1 \leqq i < \omega\},$$

ahonnan **A** zárt részhalmazrendszerei hálójának algebrai volta a II. fejezet **3.2** tételének bizonyításában látott módon következik.

Cg(X) most megadott előállításából következik:

1.6. Tétel. Bármely $\mathbf{M} = \langle M, X \rangle$ algebrára $f \in \mathbf{O}_M$ akkor és csak akkor kifejezésfüggvénye **M**-nek, ha $f \in \mathrm{Cg}(X)$.

Bizonyítás. A projekciók **M** kifejezésfüggvényei és Cg(X)-ben vannak, hasonlóképpen az X-be tartozó műveletek is; nevezzük ezeket -1, ill. 0 mélységűnek és legyen $p \in \mathbf{O}_M \setminus \mathbf{E}_M$ $n+1$ mélységű, ha $p = p(g_1, \ldots)$, ahol minden g_i legfeljebb n mélységű és van olyan g_i, amely n mélységű. A kifejezésfüggvény definíciójából (II. fejezet, **10.2**) következik, hogy f pontosan akkor kifejezésfüggvénye **M**-nek, ha i mélységű valamely $-1 \leqq i < \omega$-ra; ez azonban azt jelenti, hogy

$$f \in \bigcup\{E^i(X) : -1 \leqq i < \omega\} = \mathrm{Cg}(X),$$

mivel f pontosan akkor $i+1$ mélységű, ha $f \in E^{i+1}(X) \setminus E^i(X)$. □

Legyen $\mathbf{A} = \{A_i : i<\omega\}$ klón. Ekvivalenciák

$$\vartheta = \{\vartheta_i(\in \mathrm{Eq}(A_i)) : i<\omega\}$$

rendszerét **A** *kongruenciájának* nevezzük, ha bármely $f, f' \in A_n, g_1, \dots, g_n, g'_1, \dots, g'_n \in A_k$ elemekre

$$f\vartheta_n f', g_1\vartheta_k g'_1, \dots, g_n\vartheta_k g'_n \Rightarrow f(g_1, \dots, g_n)\vartheta_k f'(g'_1, \dots, g'_n).$$

Az $\mathbf{A}/\vartheta$ *faktorklónt* természetes módon értelmezhetjük. Ha $\vartheta = \{\nabla_{A_i} : i<\omega\}$, akkor $\mathbf{A}/\vartheta$ elfajuló klón. Bármilyen klón kongruenciái algebrai hálót alkotnak (ennek bizonyításához is használjuk az **1.3** és **1.5** tételt). Ha ennek a hálónak nincs más eleme, mint $\{\nabla_{A_i} : i<\omega\}$ és $\{\Delta_{A_i} : i<\omega\}$, akkor **A**-t *egyszerű klónnak* nevezzük.

Ha a klónok izomorfizmusának definíciójából az egyértelműség követelményét elhagyjuk, a *homomorfizmus* definíciójához jutunk. A homomorfizmustétel és az izomorfizmustételek nehézség nélkül megfogalmazhatók és beláthatók klónokra is.

Példa. Legyen $\mathscr{F}$ algebrák egy típusa, **M** pedig $\mathscr{F}$ típusú algebra. Ha minden $\mathscr{F}$ típusú p kifejezéshez hozzárendeljük azt a kifejezésfüggvényt M-en, amely p-nek felel meg, akkor az $\mathscr{F}$ típusú kifejezések klónjának homomorf leképezését kapjuk **M** kifejezésfüggvényeinek klónjába. (Ha $p \in T(X_i)$ és $i<j$, akkor $p \in T(X_j)$ is; ilyenkor $p \in T(X_i)$-nek i-változós, $p \in T(X_j)$-nek j-változós kifejezésfüggvény felel meg; az utóbbi az előbbiből fiktív változókkal való kiegészítéssel keletkezik).

IRODALOM

1. P. M. Cohn [9]
2. R. Pöschel és L. A. Kalužnin [5*]
3. Szendrei Ágnes [8*]
4. W. Taylor [1973]

GYAKORLÓ FELADATOK AZ 1. SZAKASZHOZ

1. Hány fiktív változója van egy projekciónak?
2. Hogyan hatnak a C_k^0 műveletek?
3. Zártak-e a függvényklónok olyan összetett függvények képzésére nézve, melynél a „belső függvények” különböző aritásúak?
4. Bizonyítsuk be az izomorfizmustételeket klónokra!

2. Klónok és primál algebrák

Korábban elsősorban primál algebrák által generált varietásokat vizsgáltunk. Most olyan feltételeket adunk meg egy algebra műveleteire, amelyek teljesülése esetén az algebra primál.

Az $\mathbf{M} = \langle M, F\rangle$ algebra akkor és csak akkor primál, ha $\mathbf{T_M} = \mathbf{O}_M$. Mivel F generátorrendszere a $\mathbf{T_M}$ klónnak, $\langle M, F\rangle$ pontosan akkor primál, ha $\mathrm{Cg}(F) = O_M$. Az egyszerűség kedvéért a következőkben feltesszük, hogy $M = \{0, 1, \dots, m-1\}$ $(m<\omega)$.

2.1. Definíció. Nevezzük az M-en értelmezett f műveletet *lényegesnek*, ha van legalább két lényeges változója, és értékkészlete az egész M.

2.2. Definíció. Az $\langle a_1, \dots, a_n\rangle \in M^n$ elem-n-es *karakterisztikus függvénye* a

$$\chi_{a_1,\dots,a_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x_i = a_i \ (i = 1, \dots, n), \\ 0 & \text{máskülönben} \end{cases}$$

szabállyal értelmezett n-változós művelet.

Az n-változós $(n<\omega)$, mindenütt az a $(\in M)$ értéket felvevő konstans műveletet egyszerűen a jelöli (ennek a függvénynek minden változója fiktív).

2.3. Lemma *(Werner, Wille)*. Legyen $\{0, 1\} \subseteq B \subseteq M$. Legyenek $\vee$, $\wedge$ olyan kétváltozós műveletek az M halmazon, hogy minden $b \in B$-re $b\vee 0 = 0\vee b = b$, $b\wedge 0 = 0$, $b\wedge 1 = b$. Ekkor $\vee$ és $\wedge$ az A elemeinek (egyváltozós) karakterisztikus függvényeivel, valamint a B-be tartozó értékű egyváltozós, konstans műveletekkel együtt generálják az összes, B-be eső értékkészletű műveletek klónját az M halmazon.

Bizonyítás.

$$\chi_{a_1,\dots,a_n}(x_1, \dots, x_n) = (\dots(\chi_{a_1}(x_1)\wedge\dots)\wedge\chi_{a_n}(x_n)),$$

továbbá

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in A^n} (f(a_1, \dots, a_n)\wedge\chi_{a_1,\dots,a_n}(x_1, \dots, x_n))$$

a $\vee$ és $\wedge$ műveletekre vonatkozó feltevéseink miatt. Itt $f(a_1, \dots, a_n)$ $(\in B)$ n-változós konstans műveletet jelöl. □

A **2.3** lemmából következik, hogy minden **M** véges test függvényteljes: $\vee$ és $\wedge$ gyanánt választhatjuk az összeadást és szorzást,

$$B = M \quad \text{és} \quad \chi_a(X) = 1-(x-a)^{|A|-1}.$$

2.4. Lemma *(Jablonszkij)*. Ha $f = f(x_1, \dots, x_n)$ olyan művelet az M halmazon, amelynek x_1 és x_2 lényeges változói, továbbá legalább három értéket vesz fel, akkor vannak olyan $a, b, a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_n \in M$ elemek, hogy $f(a, a_2, \dots, a_n)$, $f(b, a_2, \dots, a_n)$ és $f(a, b_2, \dots, b_n)$ páronként különbözőek.

Bizonyítás. Használjuk az

$$f(c_1, \dots, D, \dots, c_n) = \{f(c_1, \dots, d, \dots, c_n: \ d \in D\}$$

jelölést. Mivel x_1 az f-nek lényeges változója, található olyan $a_2, \dots, a_n \in M$, hogy $|f(M, a_2, \dots, a_n)| \geq 2$.

Ha $|f(M, a_2, \dots, a_n)| > 2$, akkor legyen $a \in M$ olyan, hogy $|f(a, M, \dots, M)| \geq 2$ (ha ilyen a nem létezne, x_2 nem lenne lényeges változó), és válasszuk úgy a $b_2, \dots, b_n \in M$ elemeket, hogy $f(a, a_2, \dots, a_n) \neq f(a, b_2, \dots, b_n)$. Most van olyan $b \in M$, hogy

$$f(b, a_2, \dots, a_n) \neq f(a, a_2, \dots, a_n),$$
$$f(b, a_2, \dots, a_n) \neq f(a, b_2, \dots, b_n).$$

Ha pedig $|f(M, a_2, \dots, a_n)| = 2$, akkor legyen $f(a, b_2, \dots, b_n) \notin f(M, a_2, \dots, a_n)$ (ilyen $a, b_2, \dots, b_n$ van, mivel $|f(M, \dots, M)| \geq 3$) és legyenek $f(a, a_2, \dots, a_n)$, $f(b, a_2, \dots, a_n)$ különbözőek. □

2.5. Következmény. Ha $f = f(x_1, \dots, x_n)$ olyan művelet az M halmazon, amelynek x_1, x_2 lényeges változói, és amely t (≥ 3) értéket vesz fel, akkor vannak olyan $M_1, \dots, M_n \subseteq M$ halmazok, hogy $|M_i| < t$ $(i = 1, \dots, n)$ és $|f(M_1, \dots, M_n)| = t$.

Bizonyítás. A **2.4** lemma szerinti különböző $f(a, a_2, \dots, a_n)$, $f(b, a_2, \dots, a_n)$ és $f(a, b_2, \dots, b_n)$ értékek mellett f vegye még fel a különböző $f(c_{41}, \dots, c_{4n}), \dots$ $\dots, f(c_{t1}, \dots, c_{tn})$ értékeket is. Ekkor

$$M_1 = \{a, b, c_{41}, \dots, c_{t1}\},$$
$$M_i = \{a_i, b_i, c_{4i}, \dots, c_{ti}\} \quad (i = 2, \dots, n)$$

kielégíti a lemma követelményét. □

Ha $B, C \subseteq M$, $|B| = |C| = 2$, akkor M^n

$$\{\langle a_1, \dots, x, a_{i+1}, \dots, y, a_{j+1}, \dots, a_n \rangle: \ x \in B, \ y \in C; \ a_1, \dots, a_n \in M \text{ rögzített}\}$$

alakú – négyelemű – részhalmazait *négyzeteknek* nevezzük M^n-ben.

2.6. Következmény. Ha $f = f(x_1, \dots, x_n)$ olyan művelet az M halmazon, amelynek x_1 és x_2 lényeges változói, továbbá legalább három értéket vesz fel, akkor van f-nek olyan értéke, és M^n-ben olyan négyzet, hogy f ezt az értéket a négyzet egyetlen helyén veszi fel.

Bizonyítás. Ha a lemma nem igaz, f minden M^n-beli négyzeten vagy két értéket vesz fel, mégpedig ezek mindegyikét kétszer, vagy pedig egyetlen értéket.

Ez teljesül a következő négyzetekre is, ahol $a, b, a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_n$ a **2.4** lemma állításának tesz eleget:

$$\begin{array}{ccc}
a, a_2, a_3 \dots, a_n & \text{—} & b, a_2, a_3, \dots, a_n \\
| & & | \\
a, b_2, a_3 \dots, a_n & \text{—} & b, b_2, a_3, \dots, a_n \\
| & & | \\
a, b_2, b_3 \dots, a_n & \text{—} & b, b_2, b_3, \dots, a_n \\
\vdots & & \vdots \\
a, b_2, b_3 \dots, b_n & \text{—} & b, b_2, b_3, \dots, b_n
\end{array}$$

Mivel az első sorban két különböző elem van, a második sorban *ugyanaz* a két különböző elem van stb., végül az utolsó sorban is ugyanaz a két elem áll, mint az első sorban. Így $\langle a, b_2, \dots, b_n \rangle = \langle a, a_2, \dots, a_n \rangle$ vagy $\langle a, b_2, \dots, b_n \rangle =$ $= \langle b, a_2, \dots, a_n \rangle$, ellentmondásban a **2.4** lemmával. □

2.7. Tétel *(Słupecki)*. Legyen $|M| \geq 3$. Ha F tartalmazza az összes egyváltozós műveletet és tartalmaz lényeges műveletet az M halmazon, akkor $\langle M, F \rangle$ primál.

Bizonyítás. Legyen f lényeges művelet, h pedig tetszőleges művelet az M halmazon. Legyenek a h által felvett különböző értékek $0, 1, \dots, t-1$; t szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $h \in \mathrm{Cg}\,(F)$. Ha $t = 1$, akkor ez nyilvánvaló, mert h egyváltozós (konstans) művelet, vagy ilyenből fiktív változóval való kiegészítéssel keletkezik.

A $t = 2$ esetben a **2.6** következmény szerint van M^n-ben olyan négyzet és van olyan $e \in M$, hogy azon a négyzeten $f = f(x_1, \dots, x_n)$ az e értéket egyszer veszi fel. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a tekintett négyzet

$$\{\langle x, y, a_3, \dots, a_n \rangle: \ x \in \{a_1, b_1\}, \ y \in \{a_2, b_2\}; \ a_3, \dots, a_n \text{ rögzített}\},$$

és

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = e.$$

Ha ψ_1, ψ_2 olyan egyváltozós műveletek az M halmazon, hogy

$$\psi_i(1) = a_i, \quad \psi_i(0) = b_i \quad (i = 1, 2),$$

akkor

$$x_1 \wedge x_2 = \chi_e(f(\psi_1(x_1), \psi_2(x_2), a_3, \dots, a_n)),$$

és

$$x_1 \vee x_2 = \chi_0(\chi_0(x_1) \wedge \chi_0(x_2))$$

eleget tesz a **2.3** lemma feltételeinek $B = \{0, 1\}$-re. Mivel f, χ_a $(a \in M)$, a_i $(\in A)$, ψ_i $(i = 1, 2)$ mind F-ben vannak, a **2.3** lemma szerint minden $\{0, 1\}$ értékkészletű művelet $\mathrm{Cg}\,(F)$-ben van.

A $t>2$ esetben tegyük fel, hogy a legfeljebb $t-1$ értéket felvevő műveletek M-en Cg (F)-ben vannak. A **2.5** következmény szerint vannak olyan $t-1$ elemű $M_i, \ldots, M_n$ részhalmazok M-ben, hogy $f(M_1, \ldots, M_n) = \{0, 1, \ldots, t-1\}$, tehát alkalmas $a_{01}, \ldots, a_{t-1,1} \in M_1, \ldots, a_{0n}, \ldots, a_{t-1,n} \in M_n$ elemekre

$$f(a_{01}, \ldots, a_{0n}) = 0,$$
$$\vdots$$
$$f(a_{t-1,1}, \ldots, a_{t-1,n}) = t-1.$$

Legyen tetszőleges $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle \in M^k$ elem-k-asra $h(x_1, \ldots, x_k) = i$. Definiáljuk ugyanerre az elem-k-asra a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ műveleteket a $\varphi_j(x_1, \ldots, x_k) = a_{ij}$ egyenlőséggel, más elem-k-asokra pedig tetszőlegesen; ekkor $\varphi_j \in \mathrm{Cg}(F)$, mivel φ_j értékkészlete M_j-be esik. Másrészt,

$$h(x_1, \ldots, x_k) = f(a_{i1}, \ldots, a_{in}) =$$
$$= f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_k)),$$

tehát $h \in \mathrm{Cg}(F)$. □

A most bizonyított tétel alkalmazásaként megmutatjuk, hogy léteznek olyan függvényteljes algebrák, amelyeknek nincs véges azonosságbázisa. Ehhez bizonyítás nélkül kimondjuk Murszkij nevezetes tételét (vö. az V. fejezet 4. szakaszával): ha a **G** grupoid tartalmaz olyan háromelemű – mondjuk, $\{0, 1, 2\}$ – zárt részhalmazt, amelyen **G** művelettáblázata

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	2	2

,

akkor **G**-nek nincs véges azonosságbázisa.

2.8. Tétel *(McKenzie)*. Ha $3 < n < \omega$, akkor van olyan n elemű függvényteljes algebra, amelynek nincs véges azonosságbázisa.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a

	0	1	2	3	4	…	$n-1$
0	0	0	0	1			
1	0	0	1	2			
2	0	2	2	3	4	…	$n-1$
3				4			
⋮				⋮			
$n-2$				$n-1$			
$n-1$	3	1	2	0	4	…	$n-1$

táblázattal adott f műveletű **H** grupoid – amelynek Murszkij említett tétele szerint nincs véges azonosságbázisa – függvényteljes. Azt kell belátnunk, hogy

$\mathbf{H}_H$ primál, ami ekvivalens, azzal, hogy $\langle H, P \rangle$ primál, ahol P a **H** összes polinomfüggvényeinek halmaza. Utóbbi a **2.7** tétel szerint teljesül, ha

(I) H minden, önmagába való leképezése **H** polinomfüggvénye, és

(II) **H** polinomfüggvényei között van lényeges művelet.

(II) nyilvánvaló, mert maga f lényeges művelet. (I) belátásához vegyük észre, hogy $f(x, 3)$ a H ciklikus permutációja, $f(n-1, x)$ a H transzpozíciója, $f(2, x)$ pedig H olyan leképezése önmagába, amelynek értékkészlete $n-1 (= |H|-1)$ elemű. E három polinomfüggvényből **H** minden leképezése önmagába megkapható összetett függvényként; ezért (I) igaz. □

Most megmutatjuk, hogy bármely véges M halmazon van olyan f binér művelet, hogy $\langle M, f \rangle$ primál.

2.9. Tétel *(Webb)*. $\langle M, \max(x_1, x_2)+1 \mod m \rangle$ primál.

Bizonyítás. Legyen rövidség kedvéért $x|y = \max(x, y)+1$; az összeadást most és a továbbiakban mod m értjük.

A **2.3** lemmát fogjuk alkalmazni. Ehhez a | műveletből, összetett függvényként, megalkotjuk a konstansokat, a karakterisztikus függvényeket és a $\vee$, $\wedge$ műveleteket; eközben 1 szerepét mindig $m-1$ játssza.

Jelölje $x|x$-et $c(x)$. Ekkor

$$x+1 = c(x), \max(x, y) = c^{m-1}(x|y).$$

A konstansokat így nyerjük:

$$i = \max\{x+j : j<m\}+i+1,$$

míg

$$\chi_i(x) = \max\{x+j : j<m,\ i+j \neq m-1\}+1.$$

A $\vee$ művelet szerepét max játssza, $\wedge$ szerepét pedig min, amit a következőképpen állíthatunk elő:

$$m-1-x = \max\{\max(\chi_j(x), j)+m-j : j<m\},$$

és

$$\min(x, y) = m-1-\max(m-1-x, m-1-y). \ \square$$

IRODALOM

1. Sz. V. Jablonszkij [1958*], [2*]
2. J. Słupecki [1939*]
3. D. L. Webb [1935*]
4. H. Werner [1978]

1. *(Werner)* Ha egy **M** algebrának van diszkriminátor-kifejezésfüggvénye, akkor **M** függvényteljes.

2. *(Jablonszkij)* Mutassuk meg, hogy a **2**.7 tételben elegendő az összes olyan egyváltozós függvények F-hez tartozását megkövetelni, amelyek *nem* kölcsönösen egyértelműek.

3. Lássuk be, hogy a **2**.7 tétel érvényét veszti az $|M| = 2$ esetben; továbbá f lényeges volta sem gyengíthető a **2**.7 tétel feltevésében (ha helyette azt tesszük fel, hogy f-nek legalább két lényeges változója van és értékkészlete $|M|-1$ elemű, akkor f az összes egyváltozós műveletekkel együtt nem generálja $\mathbf{O}_M$-et).

4. Ha M véges, $\mathbf{O}_M$ minden valódi részklónja benne van egy maximális valódi részklónjában.

3. Függvényklónok hálói

Adott halmazon a függvényklónok hálót alkotnak; ebben a szakaszban az ilyen hálókat vizsgáljuk, különös tekintettel atomjaikra és duális atomjaikra.

Az **A** klón zárt részhalmazrendszereinek algebrai hálóját röviden **A** *részklónhálójának* szokás nevezni. Különös érdeklődésre tarthat számot az $n(<\omega)$ elemű halmaz összes műveletei klónjának részklónhálója; ezt $\mathbf{L}_n$-nel jelöljük.

$\mathbf{L}_2$ az összes Boole-függvények klónjának részklónhálója, ezért a matematikai logika klasszikus nézőpontjából is érdekes. $\mathbf{L}_2$-nek megszámlálható sok eleme van; szerkezete ismert, diagramját Post írta fel 1921-ben.

Ha $2<n<\omega$, $\mathbf{L}_n$ szerkezete igen bonyolult. Ismerjük számosságát; tudjuk, hogy véges számú atomja és duális atomja van; a duális atomok teljes leírása is ismert. Ezen kívül csak $\mathbf{L}_n$ néhány intervallumának szerkezetét sikerült tisztázni.

3.1 Definíció. A korlátos **L** háló a elemét **L** *atomjának* nevezzük, ha $0 \prec a$; $d \in L$ *duális atomja* **L**-nek, ha $d \prec 1$.

3.2. Tétel *(Janov–Mucsnyik)*. Ha $2<n<\omega$, akkor $\mathbf{L}_n$ kontinuum-számosságú.

Bizonyítás. Véges halmazon megszámlálható sok művelet van, ezért $\mathbf{L}_n$ legfeljebb kontinuumszámosságú. Megadunk kontinuum sok különböző függvényklónt a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazon.

Legyen $F = \{f_i : 2 \leq i < \omega\}$, ahol $f_i(1, 2, \ldots, 2) = f_i(2, 1, 2, \ldots, 2) = \ldots$ $\ldots = f_i(2, \ldots, 2, 1) = 1$, és $f_i(x_1, \ldots, x_i) = 0$ minden más esetben. Megmutatjuk, hogy minden i-re $f_i \in \mathrm{Cg}(F \setminus f_i)$. Ebből következik, hogy ha $H_1, H_2 \subseteq F$, $H_1 \neq H_2$, akkor $\mathrm{Cg}(H_1) \neq \mathrm{Cg}(H_2)$, ami elegendő is a bizonyításhoz.

Tegyük fel, hogy $f_i \in \mathrm{Cg}(F \setminus f_i)$, azaz alkalmas, i-től különböző $2 \leq j < \omega$-ra

$$f_i = f_j(g_1, \ldots, g_j), \qquad (*)$$

ahol minden $1 \leq k \leq j$-re $g_k \in \mathrm{Cg}(F \setminus f_i)$, és így

(I) $g_k = x_{i_k} \quad (= e^i_{i_k})$

vagy

(II) $g_k = f_{ik}(g_{k1}, \ldots, g_{ki_k})$.

Ha legalább két különböző k-ra – mondjuk, $k=1, 2$-re – (II) teljesül, akkor $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_i)$-be $\langle 1, 2, \ldots, 2 \rangle$-t helyettesítve, ha pedig csak $k=1$-re teljesül (II), és $g_2 = x_{i_2}$, akkor $x_{i_2} = 1$-et és $j \neq i_2$-re $x_j = 2$-t helyettesítve (*) bal oldalának értéke 1, míg a jobb oldalé 0; ellentmondás. Végül, $f_i = f_j(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j})$ esetén $j<i$ lehetetlen, mert ekkor f_i-nek több lényeges változója lenne, mint $f_j(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j})$-nek. Ezért $j>i$, és így $x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}$ között előfordulnak egyenlőek (különben f_i-nek kevesebb lényeges változója lenne, mint $f_j(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j})$-nek); mondjuk $x_{i_1} = x_{i_2}$. Ekkor a bal oldalon $x_{i_1} = 1$-et és $j \neq i_1$-re $x_j = 2$-t helyettesítve, az előzőekhez hasonló ellentmondást kapunk. □

Az $\mathbf{L}_n$ hálók atomjait minimális klónoknak, duális atomjait maximális klónoknak nevezzük. A következő lemma a minimális klónok vizsgálatának segédeszköze.

3.3. lemma *(Świerczkowski)*. Legyen f k-változós ($k \geq 4$) művelet egy legalább háromelemű halmazon. Ha f minden valódi polimerje projekció, akkor f minden valódi polimerje ugyanaz a projekció.

Bizonyítás. Először gondoljuk meg, hogy ha Q a legalább négyelemű $\{1, \ldots, k\}$ halmaz Π_k partícióhálójának olyan részhalmaza, hogy

(I) $\varrho \in Q$, ha $\pi \in Q$ és $\varrho \geq \pi$,

(II) Π_k atomjai közül legalább kettő Q-ba tartozik,

(III) Q tartalmazza Π_k minden olyan α atomját, amelyet legalább két Q-beli elem követ,

akkor Q tartalmazza Π_k minden nemzérus elemét. $x = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle \in M^k$-ra jelölje $p(x)$ a Π_k azon elemét, melyre i és j pontosan akkor van $p(x)$ ugyanazon blokkjában, ha $x_i = x_j$. Ekkor $p(x)$-et az x *mintájának* nevezzük. A lemma feltevése azt jelenti, hogy bármely nemzérus $\pi \in \Pi_k$-hoz van (legalább egy) olyan $i = i(\pi)$, hogy valahányszor $p(x) \geq \pi$, mindannyiszor $f(x) = x_i$; ebből azt kell bizonyítanunk, hogy van olyan j, hogy valahányszor $p(x) \neq 0$, mindannyiszor $f(x) = x_j$.

Π_k atomjainak száma $\binom{k}{2} > k$, mert $k \geq 4$. Ezért alkalmas j-re van legalább két olyan α_1, α_2 atom Π_k-ban, hogy $p(x) \geq \alpha_1$ vagy $p(x) \geq \alpha_2$ esetén egyaránt $f(x) = x_j$. Legyen

$$Q = \{\pi \in \Pi_k : p(x) \geq \pi \Rightarrow f(x) = x_j\};$$

azt kell belátnunk, hogy Q tartalmazza Π_k minden nemzérus elemét, amihez elegendő (I)–(III) teljesülését igazolnunk.

Az $i(\pi)$ definíciójából (I), míg j értelmezéséből (II) azonnal következik.

Végül (III) igazolásához legyen $\alpha = \{\{1, 2\}, \{3\}, \ldots\}$, és tegyük fel, hogy

$$f(x)=x_j, \quad \text{ha} \quad x_1=x_2=x_3 \quad \text{vagy} \quad x_1=x_2=x_4.$$

Elegendő a $j=1, j=3, j=5$ eseteket vizsgálnunk.

Ha $j=1$ és $x_1=x_2 \Rightarrow f(x)=x_3$, akkor $x_1=x_2=x_4$, $x_1 \neq x_3$ esetén $f(x)==x_3 \neq x_1$, ellentmondás. Az $x_1=x_2 \Rightarrow f(x)=x_4$, $f(x)=x_5$ esetek hasonlóan zárhatók ki; ezért $x_1=x_2 \Rightarrow f(x)=x_1$, amit be akartunk látni.

Ha $j=3$ és $x_1=x_2 \Rightarrow f(x)=x_1$, akkor $x_1=x_2=x_4$, $x_3 \neq x_1$ esetén $f(x)==x_1 \neq x_j$, ellentmondás. Az $x_1=x_2 \Rightarrow f(x)=x_4$, $f(x)=x_5$ esetek hasonlóan zárhatók ki, tehát $x_1=x_2 \Rightarrow f(x)=x_3$. Ha pedig $j=5$ és $x_1=x_2 \Rightarrow f(x)=x_1$, akkor $x_1=x_2=x_3$, $x_5 \neq x_1$ esetén $f(x)=x_1 \neq x_j$, és a további $x_1=x_2 \Rightarrow f(x)==x_k$, $k \neq 5$ esetek hasonlóan zárhatók ki.

Hátra van még az az eset, amikor $f(x)=x_j$, ha $x_1=x_2=x_3$ vagy $x_1=x_2$, $x_3=x_4$. Ezt az előző esettel analóg módon intézhetjük el. Így $\alpha \in Q$. □.

3.4. Következmény. Bármely n-re $\mathbf{L}_n$-ben véges számú minimális klón van.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{C}$ minimális klón $\mathbf{L}_n$-ben. Ekkor C tartalmaz olyan műveletet, amely nem projekció, és minden ilyen $f \in C$-re $\mathrm{Cg}(f) = C$. Ha $n>2$, megmutatjuk, hogy C tartalmaz olyan, legfeljebb n-változós műveletet, amely nem projekció. Tegyük fel, hogy a minimális változószámú g nemprojekció a C függvényklónban $m(>n)$ változós (és így legalább négyváltozós). Ekkor g minden elem-m-esen valamelyik, legfeljebb n-változós valódi polimerje értékét veszi fel. Ezek a valódi polimerek azonban mind projekciók, és a 3.3. lemma szerint mindegyikük ugyanaz a projekció; ezért g projekció, ellentétben feltevésünkkel. Ha $n=2$, hasonlóan láthatjuk be, hogy C tartalmaz legfeljebb háromváltozós nemprojekciót.

Minden $\mathbf{L}_n$-beli minimális klónhoz hozzárendelve legkisebb változószámú nemprojekciói egyikét, az összes minimális klónok halmazát kölcsönösen egyértelműen képezzük le az (n-elemű halmazon értelmezett) összes, legfeljebb max(3, n)-változós műveletek halmazába. Utóbbi véges, így $\mathbf{L}_n$-ben véges számú minimális klón van. □

A következő tétel bizonyos áttekintést ad a minimális klónokról (teljes leírásuk csak a legfeljebb háromelemű halmazokon ismert). Egyszerűbb megfogalmazásához szükségünk lesz néhány fogalomra.

3.5. Definíció (vö. II. fejezet, **12.8**). Ha az f ternér műveletre érvényesek az

$$f(x, x, y) \approx f(x, y, x) \approx f(y, x, x) \approx x,$$

illetve

$$f(x, x, y) \approx f(x, y, y) \approx f(y, x, x) \approx y$$

azonosságok, akkor f-et *többségi*, ill. *kisebbségi függvénynek* nevezzük. Ha f-re az

$$f(x, x, y) \approx f(x, y, x) \approx f(x, y, y) \approx y$$

azonosságok teljesülnek vagy f egy ilyen azonosságokat kielégítő függvényből a változók átrendezésével keletkezik, akkor f-et $\frac{2}{3}$*-kisebbségi függvénynek* nevezzük. Ha az f legalább háromváltozós művelet minden valódi polimerje ugyanaz a projekció, akkor f-et *szemiprojekciónak* nevezzük.

3.6. Definíció. Ha az f művelet egy $\mathbf{C}$ minimális klónt generál, és f minimális aritású a $\mathbf{C}$-t generáló műveletek között, akkor f-et *minimális függvénynek* nevezzük.

3.7. Tétel. Egy f minimális függvény vagy egyváltozós, vagy binér idempotens, vagy többségi függvény, vagy kisebbségi függvény, vagy szemiprojekció.

Bizonyítás. Ha f minimális, valódi polimerjei mind projekciók. Binér f-re ez éppen azt jelenti, hogy f idempotens, míg legalább négyváltozós f-re a **3.3** lemma miatt azt, hogy f szemiprojekció. Legyen tehát f ternér minimális függvény. Ekkor f-re a következő nyolc azonosságrendszer valamelyike teljesül:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$f(x_1, x_1, x_2) \approx$	x_1	x_1	x_1	x_1	x_2	x_2	x_2	x_2
$f(x_1, x_2, x_1) \approx$	x_1	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_2	x_2
$f(x_1, x_2, x_2) \approx$	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2

Ha f-re (1), (4) vagy (6) teljesül, akkor f szemiprojekció, ha (2), akkor f többségi függvény, ha pedig (7), akkor f kisebbségi függvény. A hátralévő esetben f $\frac{2}{3}$-kisebbségi függvény. Ekkor $F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, f(x_1, x_2, x_3), x_3)$ többségi függvény (vö. II. fejezet, **12.5**). Ha megmutatjuk, hogy $f \notin \mathrm{Cg}(F)$, készen leszünk a bizonyítással, ekkor ugyanis $\mathrm{Cg}(f)$ valódi módon tartalmazza $\mathrm{Cg}(F)$-et, így nem lehet minimális klón. Elegendő belátnunk, hogy ha μ többségi függvény a véges M halmazon és a ternér f függvény $\mathrm{Cg}(\mu)$-ben van, akkor f többségi függvény, vagy projekció. **1.6** szerint azt kell belátnunk, hogy $\langle M, \mu\rangle$ bármely ternér kifejezésfüggvénye, ha nem projekció, akkor többségi függvény. A bizonyítást f mélysége szerinti indukcióval végezzük. Ha az legfeljebb 0, ez nyilvánvaló. Ha $f = (g_1, g_2, g_3)$ mélysége pozitív, akkor elegendő megvizsgálnunk azt az esetet, amikor g_1 és g_2 többségi függvény, valamint azt, amikor g_1, g_2, g_3 közül csak g_1 többségi függvény. A triviális részletektől eltekintünk. □

Most vázolni fogjuk Rosenberg tételének bizonyítását, amely véges halmazokon leírja az összes maximális klónokat. Ehhez először relációk két típusát vezetjük be.

3.8. Definíció. Az M halmazon értelmezett n-változós r relációt $(1 \leq n < \omega)$ *centrálisnak* nevezzük, ha $r \neq M^n$ és van M-nek olyan nemtriviális C részhalmaza, hogy bármely $a_1, \ldots, a_n \in M$-re

$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in r \Rightarrow \langle a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)} \rangle \in r$ $\{1, \ldots, n\}$ minden π permutációjára;
$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in r$, ha $a_i = a_j$ valamely $i \neq j$-re;
$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in r$, ha $a_i \in C$ valamely i-re.

3.9. Definíció. Az M halmazon értelmezett n-változós r relációt $(3 \leq n < \omega)$ *n-regulárisnak* nevezzük, ha

van M ekvivalenciarelációinak olyan E véges, nemüres halmaza, hogy mindegyik $\varepsilon \in E$-hez tartozó partíciónak n blokkja van;

akárhogyan választjuk ki mindegyik $\varepsilon \in E$-hez tartozó partíció egy-egy blokkját, ezek metszete nemüres;

bármely $a_1, \ldots, a_n \in M$-re $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in r$ akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon \in E$-hez van olyan a_i és a_j, hogy $i \neq j$ és $a_i \; \varepsilon \; a_j$.

3.10. tétel *(Rosenberg)*. A **C** függvényklón az M véges halmazon akkor és csak akkor maximális, ha $C = \operatorname{Pol} r$, ahol r-re a következő hat eset valamelyike teljesül:

1) r olyan részbenrendezés M-en, amely korlátos (azaz sup M és inf M létezik r-re vonatkozóan).

2) r négyváltozós reláció az M halmazon, amelyhez van olyan $\langle M, + \rangle$ elemi p-csoport (azaz p prím elemű ciklikus csoportok direkt szorzatával izomorf csoport), hogy bármely $a_1, \ldots, a_4 \in M$-re $\langle a_1, \ldots, a_4 \rangle \in r \Leftrightarrow a_1 + a_2 = a_3 + a_4$.

3) r binér reláció M-en, amelyhez van M-nek olyan p prím rendű, fixpont nélküli π permutációja, hogy bármely $a_1, a_2 \in M$-re $\langle a_1, a_2 \rangle \in r \Leftrightarrow a_2 = \pi(a_1)$.

4) r az M-nek nemtriviális ekvivalenciarelációja.

5) r az M-nek centrális relációja.

6) r az M-nek n-reguláris relációja valamely n-re.

A bizonyítás vázlata. Az elegendőség igazolása a bizonyítás könnyebb fele. Példaként megmutatjuk, hogy $\operatorname{Pol} r$ maximális, ha r korlátos részbenrendezés M-en; a 2)–6) feltételek valamelyikének eleget tevő r esetén $\operatorname{Pol} r$ maximális voltának igazolását gyakorló feladatként tűzzük ki.

Legyen $r = \leq$ korlátos részbenrendezés M-en; használjuk az $\inf M = 0$, $\sup M = 1$ jelöléseket. $\operatorname{Pol} \leq$ maximális volta azt jelenti, hogy ha $f \in \mathbf{O}_M$, $f \notin \operatorname{Pol} \leq$, akkor $\operatorname{Cg}((\operatorname{Pol} \leq) \cup \{f\}) = \mathbf{O}_M$. Ezt fogjuk belátni.

Legyen $a, b \in M$-re

$$a \vee b = \begin{cases} 1, \text{ ha van olyan } c, d \in M, \text{ hogy } c \leq a, d \leq b, \text{ és } c \not\leq d \not\leq c, \\ \sup\{a, b\} \text{ máskülönben,} \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} 0, \text{ ha van olyan } c, d \in M, \text{ hogy } a \leq c, b \leq d \text{ és } c \not\leq d \not\leq c, \\ \inf\{a, b\} \text{ máskülönben.} \end{cases}$$

Ekkor $\vee, \wedge \in \operatorname{Pol} \leq$, továbbá $b \vee 0 = 0 \vee b = b$, $b \wedge 0 = 0$, $b \wedge 1 = b$ minden $b \in M$-re. A konstans függvények ugyancsak $\operatorname{Pol} \leq$-be tartoznak. Ha igazoljuk, hogy $\operatorname{Cg}(\operatorname{Pol} \leq) \cup \{f\})$ tartalmazza M elemeinek karakterisztikus függvényeit, állításunk a **2.3** lemmából következik. Ehhez elég megmutatnunk, hogy $\operatorname{Cg}((\operatorname{Pol} \leq) \cup \{f\})$-ben van olyan g egyváltozós művelet, amely 0-t és 1-et felcseréli; ekkor ugyanis bármely $a \in M$ esetén az

$$s_a(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } a \leq x, \\ 0 \text{ máskülönben,} \end{cases}$$

$$t_a(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x \leq a, \\ 1 \text{ máskülönben} \end{cases}$$

függvényekre $s_a, t_a \in \operatorname{Pol} \leq$, és

$$\chi_a(x) = s_a(x) \wedge g(t_a(x)) \in \operatorname{Cg}((\operatorname{Pol} \leq) \cup \{f\}).$$

Mivel $f \notin \operatorname{Pol} \leq$, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy van olyan $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k \in M$, hogy $a_1 < b_1, \ldots, a_k < b_k$, de

$$f(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = c > f(b_1, \ldots, b_n, a_{k+1}, \ldots, a_n) = d,$$

vagy c összehasonlíthatatlan d-vel. Az utóbbi eset az előzőre visszavezethető, ha f helyett $s_c(f)$-et használunk; így elég az előzővel foglalkoznunk.

Legyen $i = 1, \ldots, k$ esetén

$$h_i(x) = \begin{cases} a_i, \text{ ha } x = 0, \\ b_i \text{ máskülönben.} \end{cases}$$

Ekkor $h_i \in \operatorname{Pol} \leq$, és $s_c(f(h_1(x), \ldots, h_k(x), a_{k+1}, \ldots, a_n)) \in \operatorname{Cg}((\operatorname{Pol} \leq) \cup \{f\}))$, továbbá 0-t és 1-et felcseréli.

A szükségesség bizonyításához a rövidség kedvéért nevezzük a tételben leírt $\operatorname{Pol} r$ alakú klónokat *Rosenberg-klónoknak*. Az ezektől különböző maximális klónokat $\mathbf{O}_M$-ben egyetlen Rosenberg-klón sem tartalmazza. Ezért a szükségesség bizonyításához elegendő belátnunk, hogy ha az $F \subseteq O_M$ művelethalmazt egyetlen Rosenberg-klón sem tartalmazza, akkor $\operatorname{Cg}(F) = O_M$ (azaz $\langle M, F \rangle$ primál). Ehhez szükségünk lesz a következő három állításra, amelyek egyikének sem ismeretes rövid bizonyítása; ezért mindhármat bizonyítás nélkül ismertetjük.

I. Állítás (Quackenbush): Ha egy $\langle M, F \rangle$ $(|M| > 1)$ véges algebra olyan, hogy F-et egyetlen Rosenberg-klón sem tartalmazza, akkor minden olyan r relációra, melyet minden F-beli művelet tisztel, $|r| = |M|^k$ teljesül, alkalmas k-val.

II. Állítás (Quackenbush): Ha egy $\langle M, F \rangle$ $(|M| > 1)$ véges algebra olyan, hogy minden olyan r relációra, melyet minden F-beli művelet tisztel, $|r| = |M|^k$ teljesül alkalmas k-val, akkor $\langle M, F \rangle$-nek van Malcev-kifejezésfüggvénye.

III. Állítás (McKenzie): Ha egy $\langle M; F\rangle$ véges algebra egyszerű, nincs valódi részalgebrája és van Malcev-kifejezésfüggvénye (l. II. fejezet **12.8**), akkor $\langle M; F\rangle$ kváziprimál, vagy van olyan $\langle M, +\rangle$ elemi p-csoport, hogy bármely $f \in F$-re

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n + m,$$

ahol $m \in M$, ε_i pedig $\langle M, +\rangle$ endomorfizmusa ($i = 1, \ldots, n$).

Tegyük fel, hogy $F \subseteq O_M$-et egyik Rosenberg-klón sem tartalmazza. Ekkor az I. és II. állítás szerint $\langle M, F\rangle$-nek van Malcev-kifejezésfüggvénye. Mivel $F \nsubseteq \mathrm{Pol}\, r$, ha r 4) alakú, $\langle M, F\rangle$ egyszerű. Mivel $F \nsubseteq \mathrm{Pol}\, r$, ha r 5) alakú egyváltozós reláció, $\langle M, F\rangle$-nek nincs valódi részalgebrája. Most a III. állítás mutatja, hogy $\langle M, F\rangle$ kváziprimál; ha ugyanis lenne olyan $\langle M, +\rangle$ elemi p-csoport, hogy bármely f-re

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n + m$$

($m \in M$, és ε_i az $\langle M, +\rangle$ endomorfizmusa), akkor minden f tisztelné az $\langle M, +\rangle$-hoz tartozó 2) alakú r relációt, azaz $F \subseteq \mathrm{Pol}\, r$ teljesülne egy $\mathrm{Pol}\, r$ Rosenberg-klónra.

Ha belátjuk, hogy $\langle M, F\rangle$ egyetlen automorfizmusa az identikus leképezés, azzal megmutatjuk, hogy $\{M, F\rangle$-re teljesül a IV. fejezet **10.8** következmény *c)* állítása, ahonnan következik, hogy $\langle M, F\rangle$ primál.

Ha ϱ $\langle M, F\rangle$ automorfizmusa, és ϱ-nak van fixpontja, akkor ϱ az identikus leképezés, mivel ϱ fixpontjai $\langle M, F\rangle$ zárt részhalmazát alkotják. Ha ϱ legrövidebb ciklusai

$$(a_{11} \ldots a_{1k}), \ldots, (a_{n1} \ldots a_{nk}),$$

akkor ϱ^k összes fixpontjainak halmaza

$$\{a_{11}, \ldots, a_{1k}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nk}\} = M,$$

így ϱ minden ciklusa k hosszúságú. Ha a p prímszámra $k = pk_1$, akkor $\pi = \varrho^{k_1}$ az $\langle M, F\rangle$-nek fixpont nélküli, p rendű automorfizmusa. Ekkor $F \subseteq \mathrm{Pol}\, r$, ahol $a_1, a_2 \in M$-re

$$\langle a_1, a_2\rangle \in r \Leftrightarrow a_2 = \pi(a_1),$$

azaz $\mathrm{Pol}\, r$ 3) alakú Rosenberg-klón. Mivel ez lehetetlen, így $k=1$, azaz ϱ identikus. □

3.11. Következmény. Az $\langle M, F\rangle$ véges algebra akkor és csak akkor primál, ha az F művelethalmazt egyetlen Rosenberg-klón sem tartalmazza.

Bizonyítás. Az elegendőség igazolása a **3.10** tételből és a 2. szakasz 4. feladatának állításából következik, a szükségesség pedig triviális. □

3.12. Következmény. Az $\langle M, F\rangle$ véges algebra akkor és csak akkor függvényteljes, ha az F művelethalmazt nem tartalmazzák az 1), 2), 4) és 6) típusú, valamint a legalább kétváltozós centrális relációhoz tartozó, 5) típusú Rosenberg-klónok. □

Bizonyítás. A konstansokat a felsorolt Rosenberg-klónok mindegyike tartalmazza, míg a kimaradt Rosenberg-klónok egyike sem tartalmazza az összes konstansokat. □

Meglepő tény, hogy ha az F művelethalmazt a **3.12** következményben felsorolt klónok valamelyike tartalmazza, akkor $\langle M, F\rangle$-nek általában „kevés" automorfizmusa van; ezért a „bő" automorfizmuscsoportú véges algebrák – áttekinthető kivételektől eltekintve – függvényteljesek.

IRODALOM

1. Csákány Béla [1983a*], [1983b*]
2. Demetrovics János [1975*]
3. Ju. I. Janov és A. A. Mucsnyik [1959*]
4. R. McKenzie [a]
5. Pálfy Péter Pál, Szabó László és Szendrei Ágnes [1982*]
6. R. Pöschel és L. A Kalužnin [5*]
7. R. W. Quackenbush [1981*]
8. I. G. Rosenberg [6*], [1970*], [1986*]
9. S. Świerczkowski [1960*]

Gyakorló feladatok a 3. szakaszhoz

1. A **3.10** tételre támaszkodva mutassuk meg, hogy háromelemű halmazon 18 maximális klón van, és írjuk le ezeket! Ennek felhasználásával igazoljuk, hogy a 2. szakaszban definiált Murszkij-féle grupoid nem függvényteljes.

2. Vezessük le a **3.10** tételből a **2.7** tételt!

3. Legyenek $\emptyset \subset K \subset M$ véges halmazok. Mindazok a műveletek M-en, amelyek K-t megtartják, maximális klónt alkotnak. (Ez 5) típusú Rosenberg-klón, amelyet meghatározó r reláció egyváltozós.) Lássuk be a többi Rosenberg-klón maximális voltát is!

4. *(Kuznyecov)* Ha $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ különböző maximális klónok egy véges halmazon, akkor az M_1-be és M_2-be tartozó egyváltozós függvények halmaza is különböző.

5. Vezessük le a **3.10** tétel bizonyításában használt III. állítást, magából a **3.10** tételből (amelynek ismeretes a III. állításra nem támaszkodó bizonyítása is)!

6. Bármely n természetes számhoz van olyan $f(n)$ természetes szám, hogy ha $|M| = n$ és $\langle M, F\rangle$ primál, akkor létezik olyan $F_0 \subseteq F$, hogy $|F_0| \leq f(n)$ és $\langle M, F_0\rangle$ is primál.

7. Mutassuk meg, hogy a minimális függvényeknek a **3.7** tételben felsorolt osztályai közül egyik sem üres.

8. *(Rosenberg)* Ha az f kisebbségi függvény minimális függvény a véges M halmazon, akkor $|M|=2^n$, és van olyan $\langle M, +\rangle$ elemi 2-csoport, hogy minden $\langle a_1, a_2, a_3\rangle \in M^3$-re $f(a_1, a_2, a_3) = a_1+a_2+a_3$.

4. Galois-kapcsolat műveletek és relációk között

E szakaszban azzal a nevezetes ténnyel ismerkedünk meg, hogy két azonos tartóhalmazú algebra kifejezésfüggvényeinek klónjai pontosan akkor egyenlőek, ha a két algebra műveletei ugyanazokat a relációkat tisztelik. Előkészítésül egy, az algebra számos területén használható fogalmat tanulmányozunk, amely az absztrakt algebra nagy úttörőjétől, Galois-tól ered.

Legyenek A, B nemüres halmazok, $\gamma \subseteq A\times B$. Definiáljuk a γ_1: $\mathscr{P}(A)\to\mathscr{P}(B)$ és γ_2: $\mathscr{P}(B)\to\mathscr{P}(A)$ leképezéseket: $C\subseteq A$-ra legyen

$$\gamma_1(C) = \{b\in B\colon \langle c, b\rangle \in \gamma \text{ minden } c\in C\text{-re}\},$$

és $D\subseteq B$-re legyen

$$\gamma_2(D) = \{a\in A\colon \langle a, d\rangle \in \gamma \text{ minden } d\in D\text{-re}\}.$$

4.1. Definíció. A $\langle \gamma_1, \gamma_2\rangle$ leképezéspárt $\mathscr{P}(A)$ és $\mathscr{P}(B)$ közti (a γ megfeleltetéshez tartozó) *Galois-kapcsolatnak* nevezzük.

4.2. Tétel. $\mathscr{P}(A)$ és $\mathscr{P}(B)$ közti bármely Galois-kapcsolatra érvényes:

1) γ_1 és γ_2 antimonoton, azaz $\gamma_1(C_1)\supseteq\gamma_1(C_2)$, ha $C_1\subseteq C_2$, és $\gamma_2(D_1)\supseteq\gamma_2(D_2)$, ha $D_1\subseteq D_2$.
2) $\gamma_1\gamma_2$ és $\gamma_2\gamma_1$ növelő, azaz $\gamma_1\gamma_2(D)\supseteq D$ bármely $D\subseteq B$-re, és $\gamma_2\gamma_1(C)\supseteq C$ bármely $C\subseteq A$-ra.
3) $\gamma_1\gamma_2$ és $\gamma_2\gamma_1$ monoton, azaz $\gamma_1\gamma_2(D_1)\subseteq\gamma_1\gamma_2(D_2)$, ha $D_1\subseteq D_2$, és $\gamma_2\gamma_1(C_1)\subseteq\gamma_2\gamma_1(C_2)$, ha $C_1\subseteq C_2$.
4) $\gamma_1\gamma_2$ és $\gamma_2\gamma_1$ idempotens (II. fejezet, **9.1**).
5) $\gamma_1\gamma_2$ [$\gamma_2\gamma_1$] fixpontjai éppen a $\gamma_1(C)$ $(C\subseteq A)$ [$\gamma_2(D)$ $(D\subseteq B)$] alakú halmazok; ezek $\mathscr{P}(A)$ [$\mathscr{P}(B)$] teljes részhálóját alkotják.
6) Az 5)-ben leírt teljes hálók duálisan izomorfak (azaz izomorfak egymás duálisával), és γ_1, γ_2 a megfelelő (duális) izomorfizmusok.

Bizonyítás. 1), 2) és 3) nyilvánvaló. 4) igazolásához legyen pl. $C\subseteq A$; ekkor $\gamma_1\gamma_2(D)\supseteq D$, tehát

$$\gamma_2\gamma_1\gamma_2(D)\subseteq\gamma_2(D)$$

1) miatt, de

$$\gamma_2\gamma_1\gamma_2(D)\supseteq\gamma_2(D)$$

is igaz 2) miatt. Így

$$\gamma_2\gamma_1\gamma_2=\gamma_2,$$

ezért

$$(\gamma_1\gamma_2)^2=\gamma_1\gamma_2.$$

5) igazolásához először megjegyezzük, hogy

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_1(C)=\gamma_1(C),$$

és ha D a $\gamma_1\gamma_2$ fixpontja, akkor

$$D=\gamma_1(\gamma_2 D) \quad \text{és} \quad \gamma_2(D)\subseteq A.$$

Ha $\mathscr{D}$ a $\gamma_1\gamma_2$ fixpontjainak egy halmaza, akkor

$$\gamma_1(\cup\gamma_2(\mathscr{D})) = \inf\mathscr{D}$$

a $\gamma_1\gamma_2$ fixpontjainak tartalmazás szerint részbenrendezett halmazában. Valóban, 1) miatt

$$\gamma_1(\cup\gamma_2(\mathscr{D}))\subseteq\gamma_1\gamma_2(D)=D \quad \text{minden} \quad D\in\mathscr{D}\text{-re},$$

és ha D_0 olyan fixpontja $\gamma_1\gamma_2$-nek, hogy $D_0\subseteq D$ minden $D\in\mathscr{D}$-re, akkor

$$\gamma_2(D_0)\supseteq\gamma_2(\mathscr{D})$$

és

$$D_0 = \gamma_1\gamma_2(D_0)\subseteq\gamma_1(\cup\gamma_2(\mathscr{D})).$$

6) igazolásához csak azt kell megjegyeznünk, hogy γ_1 és γ_2 antimonotonok, és egymás inverzei; így kölcsönösen egyértelműek is. □

Példák. 1. Tekintsünk egy **L** felbontási testet a 0-karakterisztikájú **K** test felett, valamint a **G(L|K)** Galois-csoportot, azaz **L** összes olyan automorfizmusainak halmazát, melyeknek K minden eleme fixpontja. Legyen

$$A = \{\alpha\colon K\subseteq\alpha\subseteq L\},$$
$$B = \{\beta\colon \{1\}\subseteq\beta\subseteq \mathbf{G(L|K)}\},$$

legyen továbbá $(\alpha, \beta)\in\gamma$, ha az α halmaz minden eleme fixpontja β minden elemének. Ekkor a γ-hoz tartozó Galois-kapcsolatban $\gamma_1\gamma_2$ fixpontjai **G(L|K)** részcsoportjai, $\gamma_2\gamma_1$ fixpontjai pedig **L**-nek a K-t tartalmazó résztestei (vö. II. fejezet 11. és 14. szakasz).

2. Legyen K az $\mathscr{F}$-típusú algebrák osztálya, X megszámlálható halmaz. Álljon az A halmaz K részosztályaiból, B pedig Id (X) részhalmazaiból, és legyen $\alpha\in A$, $\beta\in B$ esetén $(\alpha,\beta)\in\gamma$, ha minden β-ba tartozó azonosság érvényes minden

α-beli algebrán. Ekkor a γ-hoz tartozó Galois-kapcsolatban $\gamma_1\gamma_2$ fixpontjai az X feletti $\mathscr{F}$-típusú azonosságelméletek, $\gamma_2\gamma_1$ fixpontjai pedig az $\mathscr{F}$-típusú varietások.

3. Legyen $A=B$ és tegyük A-t algebrává egy (szorzásként jelölt) művelettel. Jelentse $a, b \in A$-ra $(a, b) \in \gamma$ az $ab=ba$ felcserélhetőséget. Így egy Galois-kapcsolat keletkezik (A és A között, vagyis) az A halmazon. Most $C \subseteq A$-ra $\gamma_1(C)$ $(=\gamma_2(C))$ szokásos neve: C *centralizátora;* $\gamma_1\gamma_2$ $(=\gamma_2\gamma_1=\gamma_1^2)$ fixpontjait *bicentrálisan zárt halmazoknak* nevezzük. A bicentrálisan zárt halmazok teljes hálója **4.2** 6) szerint izomorf saját duálisával.

Számunkra most legfontosabb a következő Galois-kapcsolat: legyen M véges halmaz,

$$A=\mathscr{P}(O_M), \qquad B=\mathscr{P}(R_M),$$

ahol R_M az M-en értelmezhető összes (véges változószámú) relációk halmaza. Az $\alpha \in A$, $\beta \in B$ halmazokra legyen $(\alpha, \beta) \in \gamma$, ha α minden eleme tiszteli β minden elemét. Megvizsgáljuk ennek a Galois-kapcsolatnak a fixpontjait. A γ_1, γ_2 leképezéseknek ebben az esetben szokásos speciális jelölését vezetjük be először.

Ha $S \subseteq R_M$, Pol S jelöli mindazon műveletek halmazát M-en, amelyek az S-be tartozó mindegyik relációt tisztelik. Ha pedig $F \subseteq O_M$, Inv F jelöli mindazon relációk halmazát M-en, amelyeket az F-be tartozó minden művelet tisztel. Ha $S=\{\sigma\}$, $F=\{f\}$, röviden Pol σ-t és Inv f-et írunk. Azt, hogy f tiszteli σ-t, $f \in \text{Pol}\,\sigma$ és $\sigma \in \text{Inv}\,f$ egyaránt kifejezi.

Relációk vizsgálatához szükségünk lesz a következő meggondolásokra és definíciókra.

Legyen (a_{ij}) $s \times t$ típusú mátrix M felett (azaz $a_{ij} \in M$). Ekkor (a_{ij}) tekinthető egy M-en értelmezett, s-változós α reláció jelének: (a_{ij}) oszlopai (tehát az $\langle a_{1j}, \ldots, a_{sj}\rangle$ alakú sorozatok) és csak ezek vannak az α relációban. Most $|\alpha| \leq t$ (az egyenlőség teljesül, ha (a_{ij}) oszlopai páronként különbözőek); továbbá az (a_{ij}) és (b_{ij}) azonos típusú mátrixok pontosan akkor jelölik ugyanazt a relációt, ha bennük ugyanazok az oszlopok fordulnak elő (esetleg különböző számban). Természetes módon beszélhetünk az α reláció oszlopairól.

4.3. Definíció. Az M feletti $s \times n$ típusú olyan mátrixot, amelynek minden oszlopa az α reláció valamely oszlopa, M feletti, *n-méretű α-mátrixnak* nevezzük.

Legyen f k-változós művelet M-en; f pontosan akkor tiszteli α-t, ha bármely k-méretű

$$\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{sk} \end{matrix}$$

α-mátrixra

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & f(a_{11}, \ldots, a_{1k}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{sk} & f(a_{s1}, \ldots, a_{sk}) \end{pmatrix}$$

is α-mátrix. Ha az $a_{1i}, \ldots, a_{si}$ elemek alkotta oszlopot a_i jelöli, akkor az utóbbi mátrixot írhatjuk

$$(a_1, \ldots, a_k, f(a_1, \ldots, a_k))$$

vagy

$$((a_{ij}), f(a_{ij}))$$

alakban is.

Írjuk fel egy mátrix soraiként az $M\,(=\{0, 1, \ldots, m-1\})$ halmazból képezhető összes elem-k-ast lexikografikus sorrendben (azaz $\langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ előzze meg $\langle b_1, \ldots, b_k\rangle$-t, ha van olyan j $(1 \leq j \leq k)$, hogy $i<j$ esetén $a_i=b_i$, de $a_j<b_j$):

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m-1 & \ldots & m-1 & m-1 \end{pmatrix}.$$

Jelölje e mátrix oszlopait rendre $e_1^k, \ldots, e_k^k$.

4.4. Definíció. Az $(e_1^k, \ldots, e_k^k, f(e_1^k, \ldots, e_k^k))$ mátrixot az *f művelet mátrixának,* az általa megadott relációt pedig az *f művelet relációjának* nevezzük. Ha $\mathbf{C}$ függvényklón M-en, és $C_k=\{x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_n\}$ a C-ben lévő k-változós műveletek halmaza, az

$$(e_1^k, \ldots, e_k^k, f_1(e_1^k, \ldots, e_k^k), \ldots, f_n(e_1^k, \ldots, e_k^k))$$

mátrixot *C_k mátrixának,* a hozzá tartozó relációt *C_k relációjának* nevezzük és $R(C_k)$-val jelöljük.

Mind f, mind C_k relációja m^k-változós.

4.2 5) szerint Pol Inv fixpontjai a Pol S $(S \subseteq R_M)$ alakú, Inv Pol fixpontjai pedig az Inv F $(F \subseteq O_M)$ alakú reláció-, ill. művelethalmazok. Tudjuk, hogy Pol S mindig klón; ennek a megfordítása is igaz:

4.5. Tétel. Pol Inv fixpontjai éppen a függvényklónok.

Bizonyítás. Csak azt kell belátnunk, hogy bármely $\mathbf{C}$ függvényklónra Pol Inv $C \subseteq C$. Tekintsük az

$$R(C)=\{R(C_1), R(C_2), \ldots\}$$

relációhalmazt.

Ebben egyrészt érvényes

$$R(C) \subseteq \text{Inv}\,(C).$$

Valóban, ha $f \in C_n$, akkor – bármely k-ra – f tiszteli $R(C_k)$-t. Legyen ugyanis (a_{ij}) egy n-méretű $R(C_k)$-mátrix. Ez azt jelenti, hogy alkalmas $g_j \in C_k$-ra $(j = 1, \dots, n)$

$$g_j(e_1^k, \dots, e_k^k)$$

éppen az (a_{ij}) mátrix j-edik oszlopa, ezért

$$f(a_{ij}) = f(g_1(e_1^k, \dots, e_k^k), \dots, g_n(e_1^k, \dots, e_k^k)) = \\ = f(g_1, \dots, g_n)(e_1^k, \dots, e_k^k).$$

Mivel $f(g_1, \dots, g_n) \in C_k$, $f(a_{ij})$ is oszlopa $R(C_k)$-nak, azaz $((a_{ij}), f(a_{ij}))$ is $R(C_k)$-mátrix.

Másrészt, $R(C)$ definíciója miatt, Pol $R(C) \subseteq C$; ha ugyanis f olyan k-változós művelet M-en, hogy $f \notin C_k$, akkor $f(e_1^k, \dots, e_k^k)$ nem oszlopa $R(C_k)$-nak, tehát f nem tiszteli $R(C_k)$-t. Ezért Pol Inv $C \subseteq$ Pol $R(C) \subseteq C$. □

Ezt a tételt az **1.3** tétellel egybevetve látjuk, hogy Pol Inv fixpontjai jellemezhetők néhány, a műveleteken végezhető műveletre vonatkozó zártságukkal.

Most hasonló tényt bizonyítunk az Inv Pol fixpontjaiként szolgáló relációhalmazokra. Ehhez olyan műveleteket keresünk az adott M halmazon értelmezhető relációk halmazán, amelyekre az M-en értelmezett műveletek tisztelete öröklődik (azaz, ha egy M-en értelmezett művelet tisztel bizonyos relációkat, akkor az utóbbiakon elvégzett művelet eredményét is tiszteli).

Útmutatást ad a következő egyszerű tény:

4.6. Lemma. Legyen f művelet, ϱ pedig n-változós reláció az M halmazon. Az f művelet akkor és csak akkor tiszteli ϱ-t, ha ϱ zárt részhalmaza az $\langle M, f\rangle^n$ algebrának. □

4.7. Definíció. Legyen ϱ n-változós, σ pedig p-változós reláció az M halmazon. A

$$\tau = \{\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p\rangle : \langle a_1, \dots, a_n\rangle \in \varrho, \langle b_1, \dots, b_p\rangle \in \sigma\}$$

relációt ϱ és σ *direkt szorzatának* nevezzük és $\varrho \times \sigma$-val jelöljük. (Kettőnél több ϱ_i reláció esetén a $\prod_i \varrho_i$ jelölést is használjuk.)

Ha $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, akkor a

$$\varrho_{i_1, \dots, i_k} = \{\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\rangle : \langle a_1, \dots, a_n\rangle \in \varrho\}$$

relációt a ϱ reláció $\langle i_1, \dots, i_k\rangle$-*vetületének* nevezzük.

Ha π partíciója $\{1, \dots, n\}$-nek, akkor a

$$\varrho_\pi = \{\langle a_1, \dots, a_n\rangle \in \varrho : a_i = a_j, \text{ ha } i \text{ és } j\ \pi \text{ ugyanazon blokkjában van}\}$$

relációt ϱ π-*átlójának* nevezzük.

4.8. Lemma. Ha egy művelet tisztel bizonyos relációkat, akkor ezek szorzatát, vetületeit és átlóit is tiszteli.

Bizonyítás. Azonnal átlátható a **4.6** lemma segítségével. □

Könnyű meggondolni, hogyan keletkezik adott relációk direkt szorzatának, vetületeinek és átlóinak mátrixa az adott relációk mátrixából. A $\varrho \times \sigma$ reláció összes oszlopait megkapjuk, ha σ oszlopait minden lehetséges módon ϱ oszlopai alá írjuk. A $\varrho_{i_1, \dots, i_k}$ reláció mátrixát megkapjuk, ha ϱ mátrixából csak az i_1-edik, …, i_k-adik sorokat tartjuk meg. A ϱ_π reláció mátrixát megkapjuk, ha ϱ mátrixából csak azokat az oszlopokat tartjuk meg, amelyek i-edik és j-edik eleme ugyanaz, ha i és j π-nek ugyanazon blokkjában van.

4.9. Definíció. Az M halmazon értelmezett relációk R halmazát *zárt relációhalmaznak* nevezzük, ha R tartalmazza az egyváltozós teljes relációt, továbbá zárt a direkt szorzásra, valamint az összes vetületek és az összes átlók képzésére nézve.

A definícióból következik, hogy zárt relációhalmazok metszete is zárt relációhalmaz. Ezért az M halmazon értelmezett relációk adott P halmazát tartalmazó zárt relációhalmazok között van legszűkebb, amelyet Rg (P)-vel fogunk jelölni. Rg (P) mindazokból a relációkból áll, amelyeket P-beli relációkból és az egyváltozós teljes relációból direkt szorzás, vetületképzés és átlóképzés segítségével nyerhetünk.

4.10. Definíció. Nevezzük *szabályosnak* az M feletti mátrixot, ha sorai páronként különbözőek és lexikografikus sorrendben követik egymást, továbbá oszlopai is páronként különbözőek. Nevezzük *szabályosnak* a relációt, ha szabályos mátrix adja meg.

4.11. Lemma. Legyen σ tetszőleges, nemüres reláció az M halmazon. Van M-en olyan σ' szabályos reláció, hogy Rg (σ') = Rg (σ).

Bizonyítás. Tekintsük σ olyan mátrixát, amelyben oszlopok nem ismétlődnek. E mátrixból az ismétlődő sorok közül csak egyet megtartva, olyan σ_1 reláció mátrixát kapjuk, amely σ-nak vetülete, tehát $\sigma_1 \in$ Rg (σ). A σ_1 reláció mátrixából, sorai átrendezésével, már szabályos σ' mátrixot kapunk. Az Rg $(\sigma') \subseteq$ Rg (σ) tartalmazás igazolásához így csak azt kell belátnunk, hogy, ha σ n-változós reláció és λ az $\{1, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja, akkor a

$$\sigma^\lambda = \{\langle a_{\lambda(1)}, \dots, a_{\lambda(n)}\rangle : \langle a_1, \dots, a_n\rangle \in \sigma\}$$

relációra teljesül

$$\sigma^\lambda \in \text{Rg}(\sigma).$$

Ámde

$$\sigma^\lambda = ((\overset{1}{\sigma} \times \dots \times \overset{n}{\sigma})_\pi)_{\lambda(1), \dots, \lambda(n)},$$

ahol π a $\sigma\times\ldots\times\sigma$ változói halmazának az $\{1, n+1, \ldots, n^2-n+1\}, \ldots, \ldots, \{n, 2n,, \ldots, n^2\}$ blokkokból álló partíciója.

A $\mathrm{Rg}\,(\sigma) \subseteq \mathrm{Rg}\,(\sigma')$ állítás hasonló igazolását elhagyjuk. □

4.12. Tétel (Bodnarcsuk–Kaluzsnyin–Kotov–Romov, Geiger). Inv Pol fixpontjai éppen a zárt relációhalmazok.

Bizonyítás. **4.2** 5) szerint Inv Pol fixpontjai éppen az Inv F alakú halmazok, amelyek a **4.8** lemma szerint zártak. Fordítva, legyen R az M halmazon értelmezett relációk tetszőleges zárt halmaza. Elegendő belátnunk, hogy Inv Pol $R \subseteq R$. Tegyük fel, hogy $\sigma \in$ Inv Pol R, és σ m-változós, k-méretű reláció; azt igazoljuk, hogy $\sigma \in \mathrm{Rg}\,(R)\ (=R)$.

Először megmutatjuk, hogy létezik olyan ϱ reláció M-en, hogy

$$(\mathrm{Pol}\, R)_k = (\mathrm{Pol}\,\varrho)_k.$$

Ha f k-változós művelet M-en, amelyre $f \notin$ Pol R, akkor van olyan $\tau = \tau_f \in R$, hogy $f \notin$ Pol τ_f. Belátjuk, hogy

$$\varrho = \prod_{f \notin (\mathrm{Pol}\,R)_k} \tau_f$$

a keresett reláció. Valóban, ha $g \in (\mathrm{Pol}\,\varrho)_k$, akkor $g \in (\mathrm{Pol}\,\tau_f)_k$ minden $f \notin (\mathrm{Pol}\,R)_k$-ra (mivel τ_f ϱ-nak vetülete!), így $g \in (\mathrm{Pol}\,R)_k$. Másrészt, $\varrho \in \mathrm{Rg}\,(R)$, ezért Pol $R \subseteq$ Pol ϱ.

Most már azt kell belátnunk, hogy $\sigma \in \mathrm{Rg}\,(\varrho)$. Ha σ az üres reláció (azaz $k=0$), akkor $(\mathrm{Pol}\,\varrho)_0 = \emptyset$, mert ha $c \in (\mathrm{Pol}\,\varrho)_0$, akkor $\langle c, \ldots, c\rangle \in \sigma (\in \mathrm{Inv\ Pol}\,\varrho)$. Másrészt, ha ϱ valamely oszlopa konstans – mondjuk c –, akkor $c \in (\mathrm{Pol}\,\varrho)_0$, ami lehetetlen. Így ϱ egyetlen oszlopa sem konstans, ezért $\sigma = \varrho_\pi (\in \mathrm{Rg}\,(\varrho))$, ahol π a ϱ változói halmazának egyetlen blokkból álló partíciója. Ha pedig σ nem-üres, akkor a következőket igazoljuk:

1) $\sigma \in \mathrm{Rg}\,(R(\mathrm{Pol}\,\varrho)_k)$;

2) $R(\mathrm{Pol}\,\varrho)_k \in \mathrm{Rg}\,(\varrho)$.

1) A **4.10** lemma alapján feltehetjük, hogy σ szabályos. Ekkor σ mátrixa az $R(\mathrm{Pol}\,\varrho)_k$ mátrixának első k oszlopában megtalálható részmátrixként, amely – mondjuk – az i_1-edik, ..., i_m-edik sorokban helyezkedik el ($i_1 < \ldots < i_m$). Mivel

$$\sigma \in \mathrm{Inv\ Pol}\,R \quad \text{és} \quad (\mathrm{Pol}\,R)_k = (\mathrm{Pol}\,\varrho)_k,$$

a $(\mathrm{Pol}\,\varrho)_k$-beli műveletek bármely, k-méretű σ-mátrixot σ valamely oszlopába visznek át, ezért abban a mátrixban, amelyet $R(\mathrm{Pol}\,\varrho)_k$ mátrixának σ-t tartalmazó, m számú sora alkot, minden oszlop σ oszlopa. Így

$$\sigma = (R(\mathrm{Pol}\,\varrho)_k)_{i_1, \ldots, i_m} \in \mathrm{Rg}\,(R(\mathrm{Pol}\,\varrho)_k).$$

2) Legyen f egy megfeleltetés, amely M-beli elem-k-asokhoz M-beli elemeket rendel, és tegyük fel, hogy $f \in (\mathrm{Pol}\,\varrho)_k$. Bármely, k-méretű ϱ-mátrixon f értéke

ϱ valamelyik oszlopa, ha pedig $\langle a_1, \ldots, a_k\rangle \in M^k$ egyetlen k-méretű ϱ-mátrixnak sem sora, akkor $f(a_1, \ldots, a_k)$ az M tetszőleges eleme lehet. Ugyanaz az elem-k-as azonban több, k-méretű ϱ-mátrixban is előfordulhat sorként (egyesekben esetleg többször); az ilyen sorok minden előfordulásához f M-nek ugyanazon elemét rendeli (hiszen f művelet). Fordítva, ha ezek a feltételek teljesülnek egy k-változós f megfeleltetésre M-en, akkor $f \in (\mathrm{Pol}\,\varrho)_k$.

Eszerint $R(\mathrm{Pol}\,\varrho)_k$ mátrixának oszlopai a következőképpen keletkeznek. Egymás alá írjuk mind a $|\varrho|^k$ számú, k-méretű ϱ-mátrixot, alájuk pedig (sorokként) azokat az M-beli elem-k-asokat, amelyek egyetlen ϱ-mátrixnak sem sorai (legyen ezek száma t). Az így kapott

$$(v \cdot |\varrho|^k + t) \times k$$

típusú (v a ϱ változószáma) mátrixot nevezzük (ϱ, k)-*segédmátrixnak*. A (ϱ, k)-segédmátrix soraihoz rendeljük M elemeit a következőképpen: az egymás alá írt k-méretű ϱ-mátrixok mindegyike mellé írjuk ϱ egy oszlopát (ennek i-edik komponensét a tekintett ϱ-mátrix i-edik sorához rendelve), a további t számú sorhoz pedig rendeljük M tetszőleges elemét. Ily módon $v \cdot |\varrho|^k + t$ elemű oszlopokat kapunk; ezeket minden lehetséges módon képezve, a

$$\varrho_1 = \varrho^{|\varrho|^k} \times M^t\ (\in \mathrm{Rg}\,(\varrho))$$

reláció mátrixának összes oszlopait kapjuk (M az egyváltozós, teljes relációt is jelöli M-en).

Hagyjuk el azokat az oszlopokat, amelyekben előfordul két olyan elem, melyek különbözőek annak ellenére, hogy megegyező elem-k-asok mellé írtuk őket az oszlop felírásakor. Így ϱ_1 π-átlóját kapjuk, ahol π a ϱ_1 reláció $v \cdot |\varrho|^k + t$ számú változójának az a partíciója, melyben az i-edik és j-edik változó pontosan akkor kerül egy blokkba, ha a (ϱ, k)-segédmátrix i-edik és j-edik sora megegyezik. A nyert $\varrho_2 = (\varrho_1)_\pi$ reláció is Rg(ϱ)-hoz tartozik.

ϱ_2 mátrixának oszlopai között szerepelni fog a segédmátrixnak mind a k oszlopa; ezek éppen a k-változós projekcióknak a segédmátrix sorain felvett értékeiből álló oszlopok. Cseréljük fel ϱ_2 mátrixának oszlopait úgy, hogy a segédmátrix oszlopai alkossák az első k oszlopot, eredeti sorrendjükben (ezzel ϱ_2-n nem változtattunk). Ha ϱ_2 nem szabályos, helyettesítsük a szabályos ϱ_2'-vel, a **4.11** lemma szerint. Ekkor

$$\varrho_2' = R(\mathrm{Pol}\,\varrho)_k, \quad \text{és} \quad \varrho_2' \in \mathrm{Rg}(\varrho).\ \square$$

IRODALOM

1. V. G. Bodnarcsuk, L. A. Kaluzsnyin,V. N. Kotov és B. A. Romov [1969*]
2. D. Geiger [1968*]
3. Szabó László [1978*]
4. Szász Gábor [7*]

Gyakorló feladatok a 4. szakaszhoz

1. Legyen R zárt relációhalmaz, α és β n-változós relációk az M halmazon. Ha $\alpha, \beta \in R$, akkor $\alpha \cap \beta \in R$; $n=2$ esetén $\alpha \circ \beta \in R$.

2. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Rg}(F)$ bármely elemének előállításához elegendő egyszer képeznünk (esetleg kettőnél több tényezős) direkt szorzatot, egyszer átlót és egyszer vetületet, mégpedig ebben a sorrendben.

3. Ha $\mathbf{I}$ az összes idempotens műveletek klónja a véges M halmazon, és $\mathbf{C}$ olyan klón, hogy $I \subseteq C \subseteq O_M$; akkor van olyan $K \subseteq M$, hogy

$$C = \{f \in O_M : k \in K \Rightarrow f(k, \ldots, k) = k\}.$$

[Használjuk a IV. fejezet **4.11** lemmáját.]

4. Határozzuk meg a $\mathrm{Pol}\{\leq, \neq\}$ klónt a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ $(n>2)$ halmazon!

5. Primitív pozitív klónok

Függvényekből újabb függvények származtatásának legegyszerűbb módja az összetett függvények képzése. Más függvényképzési eljárásokat is megengedve, speciális klónfajtákhoz jutunk. Ezek egyikével – s ezen könyv egyik szerzőjének rá vonatkozó, nevezetes eredményével – ismerkedünk meg ebben a fejezetben.

5.1. Definíció. Legyen $\mathscr{F}$ algebrák egy típusa. $\mathscr{F}$ típusú *primitív pozitív formulán* az X változóhalmaz felett

$$\exists y_1 \ldots \exists y_k (f_1 \approx g_1 \& \ldots \& f_n \approx g_n) \; (y_1, \ldots, y_k \in X)$$

alakú formulát értünk, ahol f_i, g_i $\mathscr{F}$ típusú kifejezések X felett.

5.2. Definíció. Legyen $F \subseteq O_M$, $h \in O_M$, ahol h m-változós. Azt mondjuk, hogy *h primitív pozitív függvény F felett*, ha van olyan $\mathbf{M} = \langle M, F \rangle$ $\mathscr{F}$ típusú algebra és $\Phi(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_m, z)$ $\mathscr{F}$ típusú primitív pozitív formula, hogy bármely $a_1, \ldots, a_m, b \in M$-re

$$h(a_1, \ldots, a_m) = b \Leftrightarrow \mathbf{M} \models \Phi(y_1, \ldots, y_k, a_1, \ldots, a_m, b).$$

Példa. Ha $f = f(x_1, \ldots, x_k)$, $g_i = g_i(x_1, \ldots, x_m) \in F (i = 1, \ldots, k)$, akkor $f(g_1, \ldots, g_k)$ primitív pozitív függvény F felett; az ezt biztosító primitív pozitív formula:

$$\exists y_1 \ldots \exists y_k \, (g_1(x_1, \ldots, x_m) \approx y_1 \& \ldots \& g_k(x_1, \ldots, x_m) = y_k \& f(y_1, \ldots, y_k) \approx z).$$

Még egyszerűbben látható, hogy a projekciók primitív pozitív függvények bármely művelethalmaz felett.

Legyen $\mathrm{Ppg}(F) = \{h \in O_M : h$ primitív pozitív függvény F felett$\}$. Példánk mutatja, hogy $\mathrm{Ppg}(F)$ klón és mindig $\mathrm{Ppg}(F) \supseteq \mathrm{Cg}(F)$.

5.3. Definíció *(Burris)*. A $\mathrm{Ppg}(F)$ alakban előálló klónokat *primitív pozitív klónoknak* nevezzük.

A következőkben megadunk O_M-en egy Galois-kapcsolatot, amelyhez tartozó fixpontok éppen a primitív pozitív klónok.

Bármely n-változós f művelet az M halmazon (azaz $f : M^n \to M$) megadható egy $(n+1)$-változós $\bar{f}$ relációval: legyen $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in M$-re

$$\langle a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \rangle \in \bar{f} \Leftrightarrow f(a_1, \ldots, a_n) = a_{n+1}.$$

5.4. Definíció. Legyen f n-változós, g pedig k-változós művelet az M halmazon. Azt mondjuk, hogy *f felcserélhető g-vel*, ha minden $k \times n$ típusú (a_{ij}) mátrixra $(a_{ij} \in M)$

$$f(g(a_{11}, \ldots, a_{k1}), \ldots, g(a_{1n}, \ldots, a_{kn})) = g(f(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, f(a_{k1}, \ldots, a_{kn})).$$

A definícióból világos, hogy f akkor és csak akkor cserélhető fel g-vel, ha g felcserélhető f-fel. Ezért ilyenkor írhatjuk, hogy $fg = gf$.

Szükségünk lesz a következő jelölésre: ha $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ azonos típusú algebrák, $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ jelöli $\mathbf{A}$ $\mathbf{B}$-be való homomorfizmusainak halmazát.

5.5. Lemma. Legyen f és g ugyanaz, mint az **5.4** definícióban. A következő öt állítás ekvivalens:

1) $fg = gf$;
2) $f \in \mathrm{Pol}\, \bar{g}$;
3) $g \in \mathrm{Pol}\, \bar{f}$;
4) $f \in \mathrm{Hom}(\langle M, g \rangle^n, \langle M, g \rangle)$;
5) $g \in \mathrm{Hom}(\langle M, f \rangle^k, \langle M, f \rangle)$. $\square$

Megvizsgáljuk az $\langle f, g \rangle \in \gamma \Leftrightarrow fg = gf$ által definiált γ relációhoz tartozó Galois-kapcsolatot O_M-en. Most $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Mint a Galois-kapcsolatokra a 4. szakaszban adott 3. példában, $F \subseteq O_M$ esetén $\gamma(F)$-et most is *F centralizátorának*, $\gamma^2 (= \gamma_1\gamma_2)$ fixpontjait pedig *bicentrálisan zárt halmazoknak* nevezzük.

5.6. Tétel *(Kuznyecov)*. A primitív pozitív klónok éppen a bicentrálisan zárt halmazok.

Bizonyítás. Elegendő belátnunk, hogy bármely $F \subseteq O_M$-re

$$\gamma^2(F) = \mathrm{Ppg}(F).$$

Bármely F művelethalmazra M-en jelölje $\bar{F}$ az $\{\bar{f} : f \in F\}$ halmazt. Ekkor az **5.5** lemma szerint $\gamma(F) = \mathrm{Pol}\, \bar{F}$ és $\overline{\gamma^2(F)} = \bar{O}_M \cap \mathrm{Inv}\, \mathrm{Pol}\, \bar{F}$. Tegyük fel, hogy $h \in \mathrm{Ppg}(F)$, és h-t a

$$\Phi(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_m, z) = \exists y_1 \ldots \exists y_k (f_1 \approx g_1 \& \ldots \& f_n \approx g_n) \; (f_i, g_i \in F)$$

primitív pozitív formula adja meg, az **5.2** definíció szerinti módon.

Képezzük az $r = \prod_{i=1}^{n} (\bar{f}_i \times \bar{g}_i)$ relációt, és jelöljük meg változóit az $y_1, \dots, y_k$, $x_1, \dots, x_m$, z, $1, \dots, n$ jelekkel a következőképpen: i-vel jelöljük meg az f_i és g_i tényezők utolsó változóit, minden más változójukat pedig $y_1, \dots, z$ közül azzal, amely Φ-ben az adott változó helyén áll. Legyen π az r változóinak az a partíciója, melyben az ugyanazzal a jellel megjelölt változók kerülnek egy osztályba. Végül az i_1-edik, …, i_m-edik, i_{m+1}-edik változók legyenek megjelölve rendre az $x_1, \dots, x_m$, z jelekkel. Ekkor

$$(r_\pi)_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}} = \bar{h} \in \bar{O}_M \cap \mathrm{Rg}(\bar{F}) = \bar{O}_M \cap \mathrm{Inv\,Pol}\, \bar{F} = \overline{\gamma^2(F)},$$

tehát $h \in \gamma^2(F)$.

Fordítva, legyen $h \in \gamma^2(F)$, azaz $\bar{h} \in \bar{O}_M \cap \mathrm{Rg}(\bar{F})$. Ekkor a 4. szakasz 2. gyakorlatának állítása szerint van olyan (nem feltétlenül különböző) $f_1, \dots, f_l \in F$, továbbá $s = f_1 \times \dots \times f_l$ változói halmazának olyan partíciója, végül s_π-nek olyan i_1-edik, …, i_{m+1}-edik változói, hogy $\bar{h} = (s_\pi)_{i_1, \dots, i_{m+1}}$. Felhasználva h-nak ezt az előállítását, megalkothatjuk azt a primitív pozitív formulát, amely h-t az **5.2** definíció szerinti módon megadja.

Részletes magyarázat helyett ezt példán mutatjuk be. Legyen $h \in \gamma^2(F)$ négyváltozós; $l = 3$, $f_1 = f_2 = f$ kétváltozós, $f_3 = g$ háromváltozós (így s 10-változós), $\pi = \{\{1, 4\}, \{5, 9\}, \{6, 10\}, \{2\}, \{3\}, \{7\}, \{8\}\}$; végül legyen $\bar{h} = ((f \times f \times g)_\pi)_{6, 1, 8, 7, 3}$. Ekkor a h-t definiáló Φ formula a következő:

$$\exists y_1\, \exists y_2 ((f(x_2, y_1) = x_5 \,\&\, f(x_2, y_2) = x_1 \,\&\, g(x_4, x_3, y_2) = x_1).$$

Eszerint tehát $h \in \mathrm{Pp}g(F)$. □

A **4.2** tételt az **5.6** tétellel egybevetve látjuk, hogy a primitív pozitív klónok nem mások, mint a művelethalmazok centralizátorai. Utóbbiak, az **5.4** lemma szerint, $\{\mathrm{Hom}(\langle \mathbf{M}, F\rangle^k, \langle \mathbf{M}, F\rangle) : k < \omega\}$ alakúak. Ezt az észrevételt használjuk annak az igazolásához, hogy a klónok között „ritka" a primitív pozitív klón:

5.7. Tétel *(Burris–Willard)*. Véges halmazon csak véges számú primitív pozitív klón van.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{M} = \langle M, F \rangle$ $\mathscr{F}$ típusú véges algebra. Az M halmazon értelmezett négyváltozós p relációt nevezzük *főkongruencia-formulával definiálhatónak,* ha van olyan $\mathscr{F}$ típusú π főkongruencia-formula (V. fejezet, **3.2** definíció), hogy $a, b, c, d \in M$-re

$$p(a, b, c, d) \Leftrightarrow \mathbf{M} \models \pi(a, b, c, d).$$

Tekintsük az $\mathbf{M}_1 = \langle M, F_1 \rangle$, $\mathbf{M}_2 = \{M, F_2\}$ $\mathscr{F}_1$-, ill. $\mathscr{F}_2$ típusú véges algebrákat. Megmutatjuk, hogy ha

a) $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ főkongruencia-formulával definiálható relációi ugyanazok, és

b) $\mathbf{M}_1$ és $\mathbf{M}_2$ legfeljebb $|M|$-változós kifejezésfüggvényei ugyanazok, akkor

$$\{\mathrm{Hom}(\mathbf{M}_1^k, \mathbf{M}_1) : k < \omega\} = \{\mathrm{Hom}(\mathbf{M}_2^k, \mathbf{M}_2) : k < \omega\},$$

azaz F_1 és F_2 centralizátora ugyanaz. Ez elég is a bizonyításhoz: mivel egy véges M halmazon értelmezett algebra (főkongruencia-formulával definiálható vagy akár összes) négyváltozós relációi halmazára is, és legfeljebb $|M|$-változós kifejezésfüggvényeinek halmazára is csak véges sok különböző lehetőség van, azért ugyanez igaz az M-en értelmezett művelethalmazok centralizátorára, tehát M-en véges számú primitív klón van.

Először megmutatjuk, hogy a) esetén

$$\mathrm{Con}\, \mathbf{M}_1^k = \mathrm{Con}\, \mathbf{M}_2^k, \ k < \omega.$$

Ehhez a II. fejezet **5.7** tételének *d)* pontja szerint elég belátnunk, hogy $\mathbf{M}_1^k$ és $\mathbf{M}_2^k$ főkongruenciái ugyanazok. Legyen $a, b, c, d \in M^k$, $a = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ stb. Jelölje Π_i az $\mathscr{F}_i$ típusú főkongruencia-formulák halmazát. Ekkor

$$\langle a, b \rangle \in \Theta(c, d) \text{ az } \mathbf{M}_1^k\text{-ban} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists \pi_1 \in \Pi_1(\mathbf{M}_1^k \models \pi_1(a, b, c, d)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists \pi_1 \in \Pi_1(\mathbf{M}_1 \models \pi_1(a_1, b_1, c_1, d_1) \& \dots$$
$$\dots \& \mathbf{M}_1 \models \pi_1(a_k, b_k, c_k, d_k)) \Leftrightarrow$$

(mivel a főkongruencia-formulák teljesülése öröklődik homomorf képekre és direkt szorzatokra)

$$\Leftrightarrow \exists \pi_2 \in \Pi_2(\mathbf{M}_2 \models \pi_2(a_1, b_1, c_1, d_1) \& \dots$$
$$\dots \& \mathbf{M}_2 \models \pi_2(a_k, b_k, c_k, d_k)) \Leftrightarrow$$

(mivel $\mathbf{M}_1$-en és $\mathbf{M}_2$-n ugyanazok a főkongruencia-formulával definiálható négyváltozós relációk)

$$\Leftrightarrow \exists \pi_2 \in \Pi_2(\mathbf{M}_2^k \models \pi_2(a, b, c, d)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle a, b \rangle \in \Theta(c, d) \text{ az } \mathbf{M}_2^k\text{-ban.}$$

Most tegyük fel, hogy $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{M}_1^k, \mathbf{M}_1)$. Ekkor ker $\varphi \in \mathrm{Con}\, \mathbf{M}_1^k = \mathrm{Con}\, \mathbf{M}_2^k$. Ezért vagy $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{M}_2^k, \mathbf{M}_2)$, vagy van olyan $f \in F_2$ (mondjuk, t-változós) és olyan $u_1, \dots, u_t \in M_2^k$, hogy $\varphi f(u_1, \dots, u_t) \neq f(\varphi u_1, \dots, \varphi u_t)$. Azonosítsuk f i-edik és j-edik ($i < j$) változóját, ha $\varphi u_i = \varphi u_j$; így az $\mathbf{M}_2$-nek legfeljebb $|M|$-változós f' kifejezésfüggvényét kapjuk. Helyettesítsük f'-be az $u_1, \dots$ elemeket úgy, hogy az i-edik és j-edik ($i < j$) változó azonosításával nyert „új" változó helyébe u_i-t írunk. Az eredmény: $f'(u_1, \dots)$. Ekkor

$$\varphi f'(u_1, \dots) = \varphi f(u_1, \dots, u_t) \neq f(\varphi u_1, \dots, \varphi u_t) = f'(\varphi u_1, \dots).$$

Most b) szerint f' $\mathbf{M}_1$-nek is kifejezésfüggvénye, tehát $\varphi \notin \mathrm{Hom}(\mathbf{M}_1^k, \mathbf{M}_1)$, aminek az ellenkezőjét tettük fel. Így $\mathrm{Hom}(\mathbf{M}_1^k, \mathbf{M}_1) = \mathrm{Hom}(\mathbf{M}_2^k, \mathbf{M}_2)$. □

IRODALOM

1. S. Burris és R. Willard (a*)
2. A. F. Danyilcsenko [1981*]
3. A. V. Kuznyecov [1979*]
4. Szabó László [1978*]

GYAKORLÓ FELADATOK AZ 5. SZAKASZHOZ

1. *(Danyilcsenko)* Ha $M = \{0, 1, \dots, m-1\}$ $(m>2)$, akkor $\mathrm{Ppg}(\{\chi_0, \dots, \chi_{m-1}\}) = O_M$ (lásd a **2.2 definíciót**).

2. *(Kuznyecov)* Határozzuk meg az összes primitív pozitív klónokat a kételemű halmazon! [Használjuk az összes klónoknak azt a leírását, amely Demetrovics [1975*]-ban található.]

Varietások és klónok

A következő meggondolások mutatják, hogy varietások vizsgálata olykor visszavezethető klónok vizsgálatára.

Legyen $\mathbf{T} = \{T(X_i)\colon i<\omega\}$ az $\mathscr{F}$ típusú kifejezések klónja és V $\mathscr{F}$ típusú algebrák egy varietása. V-hez hozzárendelhetjük $\mathbf{T}$ egy $\vartheta^V = \{\vartheta_i^V\colon i<\omega\}$ kongruenciáját a következő módon: ha $p, q \in T(X_i)$, akkor legyen

$$p\vartheta_i^V q \Leftrightarrow V \models p \approx q.$$

Másrészt, $\mathbf{T}$ bármelyik $\vartheta = \{\vartheta_i\colon i<\omega\}$ kongruenciájához hozzárendelhetjük $\mathscr{F}$ típusú algebrák egy V varietását: legyen

$$\Sigma_\vartheta = \{p \approx q\colon p, q \in T(X_\omega), \exists i(p\vartheta_i q)\}, \quad \text{és} \quad V = M(\Sigma_\vartheta).$$

A II. fejezet **14.8** tételét használva, nehézség nélkül igazolhatjuk, hogy e két megfeleltetés egymás inverze. Ha $\vartheta_1 \leq \vartheta_2$ $\mathbf{T}$ kongruenciái, akkor

$$M(\Sigma_{\vartheta_1}) \supseteq M(\Sigma_{\vartheta_2});$$

ezért az $\mathscr{F}$ típusú kifejezések klónjának kongruenciahálója duálisan izomorf az $\mathscr{F}$ típusú varietások (tartalmazás szerinti) hálójával. Innen, alkalmazva (klónokra) a második izomorfizmustételt, nyerjük a következőt.

6.1. Lemma. Az $\mathscr{F}$ típusú algebrák V varietása akkor és csak akkor minimális, ha a $\mathbf{T}/\vartheta^V$ faktorklón egyszerű. □

Az itt szereplő faktorklónokat a következőképpen jellemezhetjük (vegyük figyelembe, hogy $V = V(\mathbf{M})$, ahol $\mathbf{M} = \mathbf{T}(X_\omega)/\tau(\mathrm{Id}_V(X_\omega))$).

6.2. Lemma. Bármely $\mathscr{F}$ típusú $\mathbf{M}$ algebrára $\mathbf{T}/\vartheta^{V(\mathbf{M})} \cong \mathbf{T}_\mathbf{M}$.

Bizonyítás. Az 1. szakaszból tudjuk, hogy $p \mapsto p^\mathbf{M}$ homomorf ráképezés; azt kell belátnunk, hogy magja $\vartheta^{V(\mathbf{M})}$. Valóban,

$$p\vartheta^{V(\mathbf{M})}q \Leftrightarrow V(\mathbf{M}) \models p \approx q \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{M} \models p \approx q \Leftrightarrow p^\mathbf{M} = q^\mathbf{M}.$$

Alkalmazásként bebizonyítjuk a következőt:

6.3. Tétel *(Knoebel)*. Legyen r korlátos részbenrendezés a véges M halmazon. Ekkor $V(\langle M, \mathrm{Pol}\, r\rangle)$ minimális.

Bizonyítás. A **6.1** és **6.2** lemma alapján csak azt kell belátnunk, hogy a $\mathrm{Pol}\, r$ klón egyszerű. Legyen $\vartheta = \{\vartheta_i\colon i<\omega\}$ a $\mathrm{Pol}\, r$ kongruenciája, és tegyük fel, hogy $\vartheta \neq \{\Delta_{(\mathrm{Pol}\, r)_i}\colon i<\omega\}$. Ekkor van olyan $k<\omega$ és $p, q \in (\mathrm{Pol}\, r)_k$, hogy $p \neq q$, de $p\vartheta_k q$. Alkalmas $a_1, \dots, a_k \in M$-re $c = p(a_1, \dots, a_k) \neq q(a_1, \dots, a_k) = d$; feltehető $d \not\leq c$ (ahol $\leq$ r helyett áll). A $\mathrm{Pol}\, r$ maximális voltának igazolásánál használt jelöléssel (**3.10** tétel)

$$0 = t_c(p(a_1, \dots, a_k)\vartheta_0 t_c(q(a_1, \dots, a_k)) = 1,$$

mivel $t_c, a_1, \dots, a_k \in \mathrm{Pol}\, r$.

Legyen $f \in (\mathrm{Pol}\, r)_k$, $(k<\omega)$; megmutatjuk, hogy $f\vartheta_k 0$ $(\in (\mathrm{Pol}\, r)_k)$. Hívjuk segítségül a következő műveletet:

$$g(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x_{k+1} \neq 1, \\ f, & \text{ha} \quad x_{k+1} = 1. \end{cases}$$

Látjuk, hogy $g \in (\mathrm{Pol}\, r)_{k+1}$, továbbá

$$f = g(e_1^{k+1}, \dots, e_k^{k+1}, 1)\vartheta_k g(e_1^{k+1}, \dots, e_k^{k+1}, 0) = 0,$$

amit állítottunk. Innen $\vartheta_k = \nabla_{(\mathrm{Pol}\, r)_k}$, tehát $\mathrm{Pol}\, r$ egyszerű. □

A **6.2** lemma alapján várható, hogy bármely $\mathbf{M} = \langle M, F\rangle$-re szoros kapcsolat van $V(\mathbf{M})$ szabad algebrái és a $\mathbf{T}_\mathbf{M}$ klón között. Hogy e kapcsolatot tisztázzuk, vegyük észre, hogy a II. fejezet **10.9** definíciója és **10.10** tétele szerint $V(\mathbf{M})$ tetszőleges $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ halmaz feletti szabad algebráját a következő (Birkhofftól származó) módon alkothatjuk meg:

1. Tekintsük az összes különböző $\psi\colon \bar{X} \to M$ leképezések Ψ halmazát.

2. Képezzük a $\mathbf{D} = \prod_{\psi \in \Psi} \langle \mathrm{Sg}\,(\psi X), F\rangle$ direkt szorzatot.

3. Definiáljuk $j = 1, \dots, n$-re a $\xi_j \in D$ elemeket $\forall \psi(\xi_j(\psi) = \psi\bar{x}_j)$ által.

4. Ekkor a $\mathbf{D}$ algebra $\mathbf{F}_n = \langle \mathrm{Sg}\,(\xi_1, \dots, \xi_n), F\rangle$ részalgebrája izomorf az $\mathbf{F}_\mathbf{M}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ szabad algebrával, és $\xi_j \mapsto \bar{x}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ kiterjeszthető az ezt biztosító izomorfizmussá.

Az áttekinthetőség kedvéért tegyük fel, hogy $M = \{0, 1, \dots\}$ véges, és $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_t\}$. Ekkor $\mathbf{F}_n$ a következőképpen ábrázolható. Képezzük azt a $(t \times n)$ típusú mátrixot M felett, amelyben az i-edik sor j-edik eleme $\psi_i\bar{x}_j$. Feltehetjük, hogy a $\psi_1, \dots, \psi_t$ leképezéseket eleve olyan sorrendben adtuk meg, hogy a kapott mátrix szabályos. Vegyük észre, hogy mátrixunk j-edik oszlopa éppen ξ_j. Minden, a projekcióktól különböző n-változós p kifejezésfüggvényhez alkossunk meg egy további $p(\xi_1, \dots, \xi_n)$ oszlopot M-en (amelynek i-edik eleme tehát $p(\psi_i x_1, \dots, \psi_i x_n)$), és egészítsük ki mátrixunkat ezekkel az oszlopokkal. Az így nyert M_n mátrix oszlopai lesznek $\mathbf{F}_n$ elemei. Ekkor M_n egy t-változós reláció mátrixa, amelyet az $\mathbf{F}_\mathbf{M}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ szabad algebrát ábrázoló relációnak nevezhetünk. Továbbá M_n éppen $R(\mathbf{T}_\mathbf{M})_n$ mátrixa, és mint a **4.5** tétel bizonyításából tudjuk, az $R(\mathbf{T}_\mathbf{M}) = \{R(\mathbf{T}_\mathbf{M})_1, R(\mathbf{T}_\mathbf{M})_2, \ldots\}$ relációhalmazra $\mathrm{Pol}\, R(\mathbf{T}_\mathbf{M}) = \mathbf{T}_\mathbf{M}$. Ezzel beláttuk a következőt:

6.4. Tétel. Bármely véges $\mathbf{M}$ algebrára $T_\mathbf{M} = \mathrm{Pol}\, R$, ahol R a $V(\mathbf{M})$ varietás végesen generált szabad algebráit ábrázoló relációk halmaza. □

Irodalom

1. A. Knoebel [1985*]
2. Szendrei Ágnes [8*]
3. W. Taylor [1973]

Gyakorló feladatok a 6. szakaszhoz

1. Legyen r a **3.10** tételben leírt 3) típusú reláció az M véges halmazon. Mutassuk meg, hogy a $V(\langle M, \mathrm{Pol}\, r\rangle)$ varietás minimális!

2. Ha $\mathbf{K}$ beágyazható $\mathbf{M}$-be, akkor $\mathbf{T}_\mathbf{K}$ homomorf képe $\mathbf{T}_\mathbf{M}$-nek. Mit állíthatunk, ha $\mathbf{K}$ homomorf képe $\mathbf{M}$-nek?

7. Néhány megoldásra váró probléma

A kételemű halmazon megszámlálhatóan sok függvényklón van (l. 3. szakasz). Ennek a ténynek csak hosszadalmas, konstruktív bizonyítása ismeretes (lásd pl.: Demetrovics [1975*], Jablonski–Gawrilow–Kudrjawzew [3*]), amely egyben az összes függvényklónok leírását is megadja. Erre a leírásra támaszkodva mutatta meg Lyndon [1951], hogy minden kételemű algebra azonosságainak van véges bázisa. Az utóbbi tényre Berman [1980a*] rövidebb, nemkonstruktív bizonyítást talált, amely Baker [1977] és McKenzie [1978] eredményein alapul.

1. Probléma (Jablonszkij).* Adjunk rövid (nemkonstruktív) bizonyítást a kételemű halmaz függvényklónjai halmazának megszámlálhatóságára!

Rosenberg tételének (**3.10** tétel) Quackenbush [1981*] által adott, a 3. szakaszban bemutatott bizonyításában az I. állítás bizonyítása szerfelett hosszadalmas. Természetesen a **3.10** tétel rövid bizonyítását is nyújtaná a következő feladat megoldása:

2. Probléma.* Adjunk rövid bizonyítást a következő tényre: ha valamely $\mathbf{C}$ klónt egy véges halmazon egyetlen Rosenberg-klón sem tartalmaz, akkor C-ben van Mal'cev-függvény.

Bár a minimális klónokra a 3. szakaszbelieken túl további eredmények is ismertek (pl. Pálfy Péter Pál [a*]), a következő feladat megoldása mégis távolinak tűnik:

3. Probléma.* Írjuk le az összes minimális klónokat!

A primitív pozitív klónokat a kételemű halmazon Kuznyecov, a háromelemű halmazon Danyilcsenko [1977*] írta le. Nagyobb véges halmazokon nem ismeretes még a maximális primitív pozitív klónok (**3.10** tételhez hasonló) leírása sem. Az 5. szakaszban végzett meggondolásokból látható, hogy a primitív pozitív klónok hálója izomorf saját duálisával; ezért duális atomjainak ismeretében atomjait (a minimális primitív pozitív klónokat) is ismertnek tekinthetjük.

4. Probléma.* Határozzuk meg a maximális primitív pozitív klónokat véges halmazokon!

Lau [1978*] megmutatta, hogy a 2)–6) típusú Rosenberg-klónok mindegyike végesen generált, azaz, ha C ilyen klón, van olyan véges F_c művelethalmaz, hogy $C = \mathrm{Cg}\,(F_c)$. Ugyancsak ő igazolta, hogy legfeljebb hételemű halmazon az 1) típusú Rosenberg-klónoknak is megvan ez a tulajdonsága. Másrészt Tardos Gábor [a*] megadott egy olyan r korlátos részbenrendezést a nyolcelemű halmazon, hogy $\mathrm{Pol}\, r$ nem végesen generált.

5. Probléma.* Jellemezzük azokat az r korlátos részbenrendezéseket véges halmazon, amelyekre $\mathrm{Pol}\, r$ végesen generált!

A **2.8** tétel bizonyítása nem terjeszthető ki az $n=2$ esetre, mivel a Słupecki-tétel kételemű halmazon érvényét veszti (3. gyakorlat a 2. szakaszhoz). Az ismert háromelemű, véges azonosságbázis nélküli algebrák nem függvényteljesek (vö. az 1. gyakorlattal a 3. szakaszhoz). Ezért nyitott a következő kérdés:

6. Probléma.* Van-e olyan háromelemű függvényteljes algebra, amelynek nincs véges azonosságbázisa?

Kiegészítő irodalom

Könyvek és összefoglaló cikkek

1.* P. M. Cohn, *Universal Algebra,* Harper & Row, New York–Evanston–London, 1965. (2. kiadás: D. Reidel, Dordrecht–Boston–London, 1981, 126–132. oldal).
2.* *Diszkrét matematika a számítástudományban* (szerk.: Sz. V. Jablonszkij, O. B. Lupanov), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.
3.* S. W. Jablonski–G. P. Gavrilov–W. B. Kudrjawzew, *Boolesche Funktionen und Postsche Klassen,* Akademie-Verlag, Berlin, 1970.
4.* А. И. Мальцев, Итеративные алгебры Поста, НГУ, Новосибирск, 1976.
5.* R. Pöschel–L. A. Kalužnin, *Funktionen- und Relationenalgebren,* VEB DVW, Berlin, 1979.
6.* I. G. Rosenberg, Completeness properties of multiple-valued logic algebras (*Computer Science and Multiple-valued Logic,* North-Holland, Amsterdam–Oxford–New York, 1977), 144–186.
7.* Szász Gábor, *Bevezetés a hálóelméletbe,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.
8.* Szendrei Ágnes, *Clones in Universal Algebra,* Les Presses de l'Université de Montréal, 1986.

Cikkek és monográfiák

J. Berman
[1980a*] A proof of Lyndon's finite basis theorem, Discrete Math. **29,** 229–233.
[1980b*] Algebraic properties of k-valued logics (Proceedings X. Int. Symp. Multiple-valued Logic, Evanston, Ill., 1980), 195–204.

В. Г. Боднарчук, Л. А. Калужнин, В. Н. Котов, В. А. Ромов
[1969*] Теория Галуа для алгебр Поста, Кибернетика (Киев) 3:1–10, 5:1–9.

S. Burris–R. Willard
[a*] Finitely many primitive positive clones, Proceedings Amer. Math. Soc., sajtó alatt.

Csákány Béla
[1980*] Homogeneous algebras are functionally complete, Algebra Universalis **11,** 149–158.
[1983a*] Three-element groupoids with minimal clones, Acta Sci. Math. (Szeged) **45,** 111–117.
[1983b*] All minimal clones on the three-element set, Acta Cybernet. **6,** 227–238.

А. Ф. Данильченко
[1977*] О параметрической выразимости функций трехзначной логики, Алгебра и Логика (Новосибирск) **16,** 479–494.
[1981*] On parametrical expressibility of the functions of k-valued logic (Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **28.** Finite Algebra and Multiple-valued Logic, Szeged, 1979), 147–159.

Demetrovics János
[1975*] A kétértékű logika strukturális vizsgálata, Alk. Mat. Lapok **1,** 405–424.

Demetrovics János–Hannák László–Rónyai Lajos
[1981*] Almost all prime-element algebras with transitive automorphism groups are functionally complete (Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **28.** Finite Algebra and Multiple-valued Logic, Szeged, 1979), 191–201.

Fried Ervin–H. K. Kaiser–Márki László
[1982*] An elementary approach to polynomial interpolation in universal algebras, Algebra Universalis **15,** 40–57.

O. C. Garcia–W. Taylor
[1984*] The lattice of interpretability types of varieties, Memoirs Amer. Math. Soc. **50:**2, 1–125.

D. Geiger
[1968*] Closed systems of functions and predicates, Pacific J. Math. **27,** 95–100.

С. В. Яблонский
[1958*] Функциональные построения в k-значной логике, Труды Мат. Инст. им. В. А. Стеклова **51,** 5–142.

Ю. И. Янов, А. А. Мучник
[1959*] О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, Доклады АН СССР, **127,** 44–46.

A. Knoebel
[1985*] The equational classes generated by single functionally precomplete algebras, Memoirs Amer. Math. Soc. **57:**4, 1–83.

А. В. Кузнецов
[1979*] О средствах для овнаружения невыводимости или невыразимости (Логический вывод, Наука, Москва), 5–33.

D. LAU
[1978*] Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik, Zeitschrift f. math. Logik u. Grundlagen der Math. **24,** 79–96.
С. С. МАРЧЕНКОВ
[1982*] Однородные алгебры, Проблемы Кибернетики **39,** 85–106.
В. Л. МУРСКИЙ
[1979*] О числе k-элементных алгебр с одной бинарной операцией, не имеющих конечного базиса тождеств, Проблемы Кибернетики **35,** 5–27.
PÁLFY PÉTER PÁL
[1986] The arity of minimal clones, Acta Sci. Math. (Szeged), **50,** 331–333.
PÁLFY PÉTER PÁL–SZABÓ LÁSZLÓ–SZENDREI ÁGNES
[1982*] Automorphism groups and functional completeness, Algebra Universalis, **15,** 385–400.
E. L. POST
[1921*] Introduction to a general theory of elementary propositions, Amer. J. Math. **43,** 163–185.
R. W. QUACKENBUSH
[1981*] A new proof of Rosenberg's primal algebra characterization theorem (Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **28.** Finite Algebra and Multiple-valued Logic, Szeged, 1979), 603–634.
I. G. ROSENBERG
[1970*] Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken, Rozpravy Československ. Akad. Věd Řada Mat. Přír. Věd **80:** 4, 1–93.
[1986*] Minimal clones I: The five types (Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **43.** Lectures in Universal Algebra, Szeged, 1983), 405–427.
J. SŁUPECKI
[1939*] Kriterium pełności wielowartościowych systemov logiki zdan, C. r. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III, **32,** 102–109.
S. ŚWIERCZKOWSKI
[1960*] Algebras which are independently generated by every n elements, Fundamenta Math. **49,** 93–104.
SZABÓ LÁSZLÓ
[1978*] Concrete representation of related structures of universal algebras I, Acta Sci. Math. (Szeged) **40,** 175–184.
SZABÓ LÁSZLÓ–SZENDREI ÁGNES
[1981*] Słupecki-type criteria for quasilinear functions over a finite dimensional vector space, Elektron. Informationsverarb. Kybernet. **17,** 601–611.
SZENDREI ÁGNES
[1981*] Clones of linear operations on finite sets (Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **28.** Finite Algebra and Multiple-valued Logic, Szeged, 1979), 693–738.

TARDOS GÁBOR
[a*] A not finitely generated maximal clone of monotone operations, Order, sajtó alatt
D. L. WEBB
[1935*] Generation of any n-valued logic by one binary operation, Proceedings Nat. Acad. Sci. USA **21,** 252–254.