ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б. ЧАКАНЬ*) (Москва)

Цель настоящей работы — установить взаимосвязь между следующими классами алгебраических систем: унитарные модули, абелевы Ω-группы и универсальные алгебры с некоторыми условиями (которые мы в дальнейшем точно сформулируем), исследованные К. Шода (см. [4], [5], [6]). Мы покажем, что с некоторой точки зрения между этими классами алгебраических образований нет существенного различия.

§ 1

Под алгеброй мы будем понимать множество вместе с некоторой системой определенных в нем конечноместных операций. Алгебры A и B называются подобными, если операции из A можно взаимно однозначно сопоставлять операциям из B так, что соответствующие операции применимы к одному и тому же числу злементов. Такой класс подобных алгебр, который состоит из всех алгебр, удовлетворяющих некоторому множеству тождественных соотношений, называется примитивным классом. Алгебры мы будем обозначать большими латинскими, примитивные классы алгебр — большими готическими, а элементы алгебр — маленькими латинскими буквами. Греческие буквы φ, ψ, θ будут обозначать отображения, а μ, ν, $\varrho, \ldots$ — операции.

Под операциями данного примитивного класса $\mathfrak{A}$ в дальнейшем мы будем понимать не только основные операции, но и все главные производные операции этого класса, т. е. такие производные операции, которые задаются полиномами класса $\mathfrak{A}$ (см. [1]). Результат операции μ, примененной к элементам $a_1, \ldots, a_m$, мы обозначим через $a_1 \ldots a_m \mu$. Рассмотрим операцию $x_1 \ldots x_{l_1} \ldots x_{l_n} \ldots x_m \mu$. Если результат этой операции зависит только от элементов, подставленных вместо символов $x_{l_1}, \ldots, x_{l_n}$, то операцию μ назовем n-местной. В дальнейшем, пользуясь обозначением $x_1 \ldots x_n \mu$, мы всегда будем предполагать, что μ — n-местная операция. Если в рассматриваемом примитивном классе тождественно $x_1 \ldots x_n \mu = x_1 \ldots x_n \nu$, то операции μ и ν не будем различать, несмотря на то, что они могут быть заданы полиномами с различными числами символов. Так, например, в примитивном классе абелевых групп с основными операциями 0, $-x$, $x+y$ мы не будем отличать формально одноместную операцию $x-x$ от 0. Множество всех операций примитивного класса $\mathfrak{A}$ обозначим через $O(\mathfrak{A})$. Слово из примитивного класса $\mathfrak{A}$, составленное из символов $x_1, \ldots, x_m$ и из операций (не обязательно основных) класса $\mathfrak{A}$ $\mu_1, \ldots, \mu_n$, обозначается так: $v(x_1, \ldots, x_m; \mu_1, \ldots, \mu_n)$. Будем говорить, что $v(x_1, \ldots, x_m; \mu_1, \ldots, \mu_n)$ является словом первой степени над системой операций $\mu_\lambda (\lambda \in \Lambda)$, если оно имеет вид $x_1 \ldots x_m \mu_\varkappa$ $(\varkappa \in \Lambda)$. Если же слово $v(x_1, \ldots, x_m; \mu_1, \ldots, \mu_n)$ имеет вид $u_1 \ldots u_l \mu_\varkappa (\varkappa \in \Lambda)$, где u_i $(i=1, \ldots, l)$ являются словами степени меньше n над системой μ_λ $(\lambda \in \Lambda)$ и среди них существует слово степени $n-1$, то мы его будем называть словом степени n над данной системой операций (ср. [1]).

Если в некотором примитивном классе мы отождествляем изоморфные между собой алгебры, то получаем класс алгебр, который будем называть абстрактным примитивным классом. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь абстрактные примитивные классы.

Определение 1. Алгебры A и B называются эквивалентными, если существуют такое взаимно однозначное отображение θ алгебры A на алгебру B и такое взаимно однозначное отображение φ множества всех операций алгебры A на множество всех операций алгебры B, что для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ и произвольной n-местной операции ν из A выполняется:

$$(a_1 \ldots a_n \nu)\, \theta = (a_1 \theta) \ldots (a_n \theta)\, (\nu \varphi).$$

Будем говорить, что эта эквивалентность определяется отображением операций φ.

Определение 2. Примитивные классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются эквивалентными, если существуют такое взаимно однозначное отображение φ множества $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{B})$ и такое взаимно однозначное соответствие между алгебрами классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что между соответствующими алгебрами существует эквивалентность, определяемая отображением операций φ.

Следует отметить, что из определений вытекает, что в обоих случаях φ n-местную операцию переводит в n-местную.

*) B. Csákány

Лемма 1. Примитивные классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда эквивалентны, если существует такое взаимно однозначное отображение ψ множества $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{B})$, что

(1) $$v(x_1, \ldots, x_j;\ \mu_1, \ldots, \mu_m) = w(x_i, \ldots, x_k;\ \mu_l, \ldots, \mu_n)$$

тогда и только тогда является тождеством в $\mathfrak{A}$, если

(2) $$v(x_1, \ldots, x_j;\ \mu_1\psi, \ldots, \mu_m\psi) = w(x_i, \ldots, x_k;\ \mu_l\psi, \ldots, \mu_n\psi)$$

— тождество в $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — эквивалентны с отображением операций ψ и пусть (1) — тождество в $\mathfrak{A}$. Покажем, что (2) — тождество в $\mathfrak{B}$. Если B — произвольная алгебра из $\mathfrak{B}$ и $b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_j, \ldots, b_k$ — произвольные ее элементы, то пусть A — алгебра из $\mathfrak{A}$, эквивалентная B относительно отображения элементов θ и $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_k$ — такие элементы из A, что $a_h\theta = b_h$ $(h=1, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, k)$. В A выполняется равенство $v(a_1, \ldots, a_j;$ $\mu_1, \ldots, \mu_m) = w(a_i, \ldots, a_k;\ \mu_l, \ldots, \mu_n)$, поэтому в силу эквивалентности A и B в B выполняется равенство $v(a_1\theta, \ldots, a_j\theta$: $\mu_1\psi, \ldots, \mu_m\psi) = w(a_i\theta, \ldots, a_k\theta;$ $\mu_l\psi, \ldots, \mu_n\psi)$, т. е. равенство $v(b_1, \ldots, b_j;\ \mu_1\psi, \ldots, \mu_m\psi) = w(b_i, \ldots b_k;$ $\mu_l\psi, \ldots, \mu_n\psi)$. Аналогично можно показать, что, если (2) — тождество в $\mathfrak{B}$ то (1) — тождество в $\mathfrak{A}$. Получаем, что требуемым отображением является ψ.

Чтобы доказать обратное, предположим существование отображения ψ, требуемого леммой, и покажем, что для любой алгебры A из $\mathfrak{A}$ существует алгебра в $\mathfrak{B}$, эквивалентная A. В множестве A мы определим операции класса $\mathfrak{B}$ следующим образом:

$$a_1 \ldots a_n v = a_1 \ldots a_n (v\psi^{-1})$$

($a_i \in A$, v — операция класса $\mathfrak{B}$). Так мы получим алгебру A', эквивалентную A (отображение элементов — тождественное, а отображение операций есть ψ). Покажем, что A' принадлежит классу $\mathfrak{B}$. В самом деле, если $v(x_1, \ldots, x_j; v_1, \ldots, v_m) = w(x_i, \ldots, x_k; v_l, \ldots, v_n)$ — тождество в $\mathfrak{B}$, то $v(x_1, \ldots, x_j;$ $v_1\psi^{-1}, \ldots, v_m\psi^{-1}) = w(x_i, \ldots, x_k;\ v_l\psi^{-1}, \ldots, v_n\psi^{-1})$ — тождество в $\mathfrak{A}$, поэтому оно тождественно выполняется и в A, и, в силу определения операций класса $\mathfrak{B}$ в алгебре A', $v(x_1, \ldots, x_j;\ v_1, \ldots, v_m) = w(x_i, \ldots, x_k;\ v_l, \ldots v_n)$ тождественно выполняется в A'.

Сопоставим каждой алгебре A из $\mathfrak{A}$ алгебру A' из $\mathfrak{B}$, образованную указанным образом. Мы получим взаимно однозначное отображение класса $\mathfrak{A}$ в класс $\mathfrak{B}$. В самом деле, если $A' \cong C'$, где A, C — алгебры класса $\mathfrak{A}$, и если этот изоморфизм есть θ, то θ одновременно является и изоморфизмом A на C, т. е. $A \cong C$, а поэтому $A = C$, так как мы рассматриваем $\mathfrak{A}$ как абстрактный примитивный класс. Кроме того, $A \to A'$ — отображение класса $\mathfrak{A}$ на весь класс $\mathfrak{B}$. Чтобы показать это, берем алгебру B из $\mathfrak{B}$. В множестве B мы определим операции класса $\mathfrak{A}$ следующим образом: $b_1 \ldots b_n\mu = b_1 \ldots b_n(\mu\psi)$ $(b_1, \ldots, b_n \in B;$ μ — операция класса $\mathfrak{A}$). Тогда, как и выше, можно показать, что полученная алгебра B^* принадлежит классу $\mathfrak{A}$; далее, мы видим, что $B^{*\prime} = B$. Мы получаем, что $A \to A'$ — взаимно однозначное отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, и между соответствующими алгебрами классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ существует эквивалентность, определяемая отображением операций ψ. Это и значит, что примитивные классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ эквивалентны.

§ 2

Сейчас мы напомним некоторые определения из общей теории алгебраических систем.

Подалгебра B алгебры A называется нормальной в A, если она является классом некоторой конгруэнции алгебры A (см. [7]).

Прямым произведением алгебр $A_1, \ldots, A_n$ называется множество $A_1 \times \ldots \times A_n$ всех векторов вида $(a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in A_i;\ i=1, \ldots, n)$, в котором операции производятся покомпонентно.

Примитивный класс $\mathfrak{A}$ называется правильным, если в любой алгебре из $\mathfrak{A}$ каждая конгруэнция однозначно определяется любым своим классом (см. [1]).

Примитивный класс $\mathfrak{A}$ называется нормальным, если в любой алгебре из $\mathfrak{A}$ произвольные две конгруэнции перестановочны как отношения (см. [1]).

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — примитивный класс, удовлетворяющий следующим условиям:

I. В $\mathfrak{A}$ существует нульместная операция, отмеченный которой элемент образует подалгебру в любой алгебре класса $\mathfrak{A}$.

II. Класс $\mathfrak{A}$ правильный.

III. В любой алгебре из $\mathfrak{A}$ каждая подалгебра нормальна.

Если A, B, G — алгебры из $\mathfrak{A}$, $A, B \subseteqq G$, $\{A, B\} = G$ и $A \cap B = 0$, где 0, как всюду в дальнейшем, означает элемент, отмеченный нульместной операцией условия I, то $G \cong A \times B$ и существует такой изоморфизм φ алгебры G на $A \times B$, что $a\varphi = (a, 0)$, $b\varphi = (0, b)$ $(a \in A,\ b \in B)$.

Доказательство. Пусть $\bar{A}$ — множество всех таких элементов $\bar{a}$ из G, которые конгруэнтны некоторому элементу алгебры A относительно конгруэнции алгебры G, в силу II и III однозначно определенной подалгеброй B. Эту конгруэнтность в дальнейшем, ради краткости, будем обозначать так: $\bar{a}\equiv a\,(\mathrm{mod}\,B)$. Пусть μ — n-местная операция в классе $\mathfrak{A}$, $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \in \bar{A}$, $\bar{a}_i \equiv a_i$ (mod B), $a_i \in A$ $(i=1, \ldots, n)$. Тогда $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n\mu \equiv a_1 \ldots a_n\mu$ (mod B), и, ввиду $a_1 \ldots a_n\mu \in A$, $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n\mu \in \bar{A}$, т. е. $\bar{A}$ — подалгебра в G. Очевидно, что $A \subseteqq \bar{A}$, далее, учитывая, что $0 \in A, B$, мы видим, что $B \subseteqq \bar{A}$. Отсюда $\bar{A}=G$. Аналогично, если $\bar{B}$ есть множество всех таких элементов из G, которые конгруэнтны с некоторым элементом из B относительно той конгруэнции алгебры G, которая, снова в силу II и III, однозначно определена подалгеброй A, то $\bar{B}=G$.

Поэтому для любого $g \in G$ существуют такие $a \in A$ и $b \in B$, что $g \equiv a$ (mod B), $g \equiv b$ (mod A). Конгруэнция mod B определяет некоторую конгруэнцию в подалгебре A. Класс этой последней конгруэнции, содержащий 0, есть, ввиду $A \cap B = 0$, сам 0; но 0 есть в A класс тривиальной конгруэнции, в которой каждый элемент сам образует класс, поэтому, в силу II, в A конгруэнция mod B совпадает с тривиальной. Если теперь $g \equiv a'$ (mod B), $(a' \in A)$, то $a' \equiv a\,(\mathrm{mod}\,B)$, а поэтому $a'=a$. Мы получили, что g однозначно определяет a. Аналогично можно показать, что и b однозначно определяется элементом g.

Рассмотрим теперь однозначное отображение φ алгебры G в $A \times B$, ставящее в соответствие элементу $g \in G$ пару (a, b), где компоненты $a \in A$ и $b \in B$ определены выше. Пусть элемент $g' \in G$ таков, что $g'\varphi=(a, b)$. Тогда $g' \equiv a\,(\mathrm{mod}\,B)$, $g' \equiv b\,(\mathrm{mod}\,A)$, т. е. $g \equiv g'\,(\mathrm{mod}\,A)$ и $g \equiv g'\,(\mathrm{mod}\,B)$. Тогда g и g' конгруэнтны и в конгруэнции mod $A \cap$ mod B, которая определяется так: $x \equiv y\,(\mathrm{mod}\,A \cap \mathrm{mod}\,B)$ тогда и только тогда, если $x \equiv y\,(\mathrm{mod}\,A)$ и $x \equiv y\,(\mathrm{mod}\,B)$. Класс конгруэнции mod $A \cap$ mod B, содержащий 0, есть, ввиду $A \cap B = 0$, сам 0; поэтому эта конгруэнция, в силу II, является тривиальной, поэтому $g'=g$. Мы получили, что отображение φ взаимно однозначно.

Пусть μ — операция, как выше, $g_1, \ldots, g_n \in G$, $g_i\varphi=(a_i, b_i)\,(i=1, \ldots, n)$. Тогда $(g_1\varphi)\ldots(g_n\varphi)\mu=(a_1, b_1)\ldots(a_n, b_n)\mu=(a_1\ldots a_n\mu, b_1\ldots b_n\mu)$. Но $a_1\ldots a_n\mu \equiv g_1\ldots g_n\mu\,(\mathrm{mod}\,B)$ и $b_1\ldots b_n\mu \equiv g_1\ldots g_n\mu\,(\mathrm{mod}\,A)$, откуда $(a_1\ldots a_n\mu, b_1\ldots b_n\mu) = (g_1\ldots g_n\mu)\varphi$, т. е. φ — изоморфное отображение. Если $a \in A$, то $a \equiv a\,(\mathrm{mod}\,B)$ и $a \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,A)$, т. е. $a\varphi=(a, 0)$. Аналогично получим, что если $b \in B$, то $b\varphi=(0, b)$.

Наконец, покажем, что φ отображает G на всю алгебру $A \times B$. Пусть (a, b) — произвольный элемент из $A \times B$. $A\varphi$ — подалгебра алгебры $A \times B$, и, в силу II и III, она однозначно определяет в $A \times B$ конгруэнцию mod $A\varphi$. Далее, $A\varphi=(A, 0)$ является классом той конгруэнции алгебры $A \times B$, классами которой являются подмножества (A, b), $b \in B$. В силу II, эта конгруэнция и конгруенция mod $A\varphi$ совпадают. Поэтому имеет место $(a, b) \equiv (0, b)\,(\mathrm{mod}\,A\varphi)$. Очевидно, $A\varphi \subseteqq G\varphi$, а эта последняя подалгебра также однозначно определяет конгруэнцию mod $G\varphi$. Класс конгруэнции mod $A\varphi \cap$ $\cap$ mod $G\varphi$, содержащий $0=(0, 0)$, есть $A\varphi$, поэтому, ввиду II, эта конгруэнция совпадает с конгруэнцией mod $A\varphi$, откуда следует, что $x \equiv y\,(\mathrm{mod}\,A\varphi)$ $(x, y \in A \times B)$ влечет за собой $x \equiv y\,(\mathrm{mod}\,G\varphi)$. Поэтому $(a, b) \equiv (0, b)\,(\mathrm{mod}\,G\varphi)$. Но $(0, b)=b\varphi \in G\varphi$, откуда $(a, b) \in G\varphi$. Этим лемма доказана.

§ 3

Примитивный класс $\mathfrak{A}$ называется примитивным классом *абелевых Ω-групп*, если среди операций класса $\mathfrak{A}$ есть бинарная операция сложение (для которой мы будем пользоваться обычной записью), являющееся ассоциативным, коммутативным и обратимым, далее, есть такое множество операций Ω, что для любой операции $\omega \in \Omega$ имеют место тождества

$$0\ldots 0\omega=0 \tag{3}$$

(где 0 — нуль операции сложения) и

$$(x_1+y_1)\ldots(x_n+y_n)\,\omega=x_1\ldots x_n\omega+y_1\ldots y_n\omega, \tag{4}$$

а все остальные операции являются главными производными операциями от $+$, $-$ и Ω (см. [2]).

Заметим, что примитивные классы абелевых Ω-групп можно охарактеризовать следующим образом: примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является примитивным классом абелевых Ω-групп, если в $\mathfrak{A}$ есть двуместная операция сложение, являющееся ассоциативным и обратимым; кроме того, если ω — произвольная n-местная операция в классе $\mathfrak{A}$, то имеют место тождества (3) и (4). Эту характеристику мы и считаем определением примитивного класса абелевых Ω-групп.

Теорема 1. *Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является примитивным классом абелевых Ω-групп, если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I, II, III леммы 2 и условию:*

IV. Класс $\mathfrak{A}$ нормальный.

Доказательство: Необходимость условий I—IV вытекает из известных свойств абелевых Ω-групп (см. [2]). Перейдем к доказательству достаточности.

Прежде всего заметим, что для любой операции ω класса $\mathfrak{A}$ по определению элемента 0 выполняется (3).

Теперь рассмотрим свободную алгебру F в классе $\mathfrak{A}$ со свободными образующими x, y. Тогда $F=\{\{x\}, \{y\}\}$. Пусть $Z \in \{x\} \cap \{y\}$, тогда $z=x\pi=y\varrho$, где π, ϱ — подходящие операции класса $\mathfrak{A}$. Поскольку x, y — свободные образующие алгебры F, значит, $x\pi=y\varrho$ — тождество в $\mathfrak{A}$, поэтому оно выполняется в F и для случая $y=0$, т. е. имеет место $x\pi=0$, откуда $z=0$. Получаем, что $\{x\}\cap\{y\}=0$. Мы видим, что для F, $\{x\}$, $\{y\}$ выполняются требования леммы 2, поэтому существует изоморфное отображение φ алгебры F на $\{x\}\times\{y\}$, при котором $x\varphi=(x, 0)$, $y\varphi=(0, y)$. В F есть такой элемент $f(x, y)$, что $f(x, y)\varphi=(x, y)$. Однако, $f(x, y)$ — полином от x, y в классе $\mathfrak{A}$, т. е. оно — думестная операция класса $\mathfrak{A}$. Обозначим эту операцию через $x+y$. Тогда

$$(x, y)=(x+y)\varphi=x\varphi+y\varphi=(x, 0)+(0, y)=(x+0, 0+y),$$

откуда $x=x+0$, $y=0+y$, что показывает, что 0 — единичный элемент относительно сложения, ввиду того, что x, y — свободные образующие алгебры F.

Пусть теперь ω — произвольная n-местная операция класса $\mathfrak{A}$. Рассмотрим свободную алгебру M в классе $\mathfrak{A}$ со свободными образующими $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ и ее подалгебры $K=\{x_1, \ldots, x_n\}$, $L=\{y_1, \ldots, y_n\}$. Как и выше, можно показать, что лемма 2 применима к алгебрам M, K, L. Значит, существует такой изоморфизм θ алгебры M на $K\times L$, что $x\theta=(x, 0)$, $y\theta=(0, y)$ для $x\in K$, $y\in L$. Тогда имеет место:

$$\begin{aligned}
&(x_1+y_1)\ldots(x_n+y_n)\,\omega=\\
&=[(x_1+y_1)\,\theta\ldots(x_n+y_n)\,\theta\omega]\,\theta^{-1}=[(x_1\theta+y_1\theta)\ldots(x_n\theta+y_n\theta)\,\omega]\,\theta^{-1}=\\
&=[((x_1, 0)+(0, y_1))\ldots((x_n, 0)+(0, y_n))\,\omega]\,\theta^{-1}=\\
&=[(x_1, y_1)\ldots(x_n, y_n)\,\omega]\,\theta^{-1}=(x_1\ldots x_n\omega, y_1\ldots y_n\omega)\,\theta^{-1}=\\
&=(x_1\ldots x_n\omega+0, 0+y_1\ldots y_n\omega)\,\theta^{-1}=[(x_1\ldots x_n\omega, 0)+(0, y_1\ldots y_n\omega)]\,\theta^{-1}=\\
&=[(x_1\ldots x_n\omega)\,\theta+(y_1\ldots y_n\omega)\,\theta]\theta^{-1}=x_1\ldots x_n\omega+y_1\ldots y_n\omega.
\end{aligned}$$

Мы видим, что в классе $\mathfrak{A}$ для любой операции ω тождественно выполняется равенство (4). Отсюда следует и ассоциативность операции сложения.

Мы только сейчас используем условие IV, чтобы показать обратимость операции сложения. Как доказал А. И. Мальцев [1], выполнение IV в классе $\mathfrak{A}$ влечет за собой существование в $\mathfrak{A}$ трехместной операции ϱ, удовлетворяющей тождеству: $xxy\varrho=yxx\varrho=y$. Поэтому, в силу только что доказанного, имеет место и тождество:

$$\begin{aligned}
&x+0x0\varrho=x00\varrho+0x0\varrho=\\
&=(x+0)\,(0+x)\,(0+0)\,\varrho=xx0\varrho=0,
\end{aligned}$$

т. е. $0x0\varrho$ не что иное, как противоположный элемент для x. Итак, теорема доказана.

§ 4

Теорема 2. Для произвольного примитивного класса $\mathfrak{A}$ абелевых Ω-групп существует такое ассоциативное кольцо с единицей R, единственное с точностью до изоморфизма, что примитивный класс всех правых унитарных R-модулей $\mathfrak{R}$ эквивалентен классу $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Множество M, состоящее из всех одноместных операций и из нульместной операции 0 класса $\mathfrak{A}$, можно превратить в кольцо следующим естественным образом: если $\mu_1, \mu_2\in M$, то

$$\begin{aligned}
&x(\mu_1+\mu_2)=x\mu_1+x\mu_2, \quad x(-\mu_1)=-x\mu_1,\\
&x(\mu_1\mu_2)=(x\mu_1)\,\mu_2.
\end{aligned}$$

Легко проверить для операций, определенных таким образом, выполнение аксиом ассоциативного кольца. Полученное кольцо будем обозначать через R. Заметим, что R — кольцо с единицей, причем роль единицы играет тождественная операция ε: $x\varepsilon=x$. В дальнейшем для операции $\mu\in M$, рассматриваемой как элемент кольца R, будет использоваться обозначение $\overline{\mu}$

Покажем, что примитивный класс всех правых унитарных R-модулей $\mathfrak{R}$ эквивалентен классу $\mathfrak{A}$. Для этого, по лемме 1, достаточно найти такое взаимно однозначное отображение множества $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{R})$, при котором тождества класса $\mathfrak{A}$ и только они переходят в тождества класса $\mathfrak{R}$.

В силу тождества (4) в классе $\mathfrak{A}$ каждая n-местная $(n>0)$ операция μ разлагается следующим образом: $x_1\ldots x_n\mu=x_1 0\ldots 0\mu+\ldots+0\ldots 0x_n\mu=x_1\mu_1+\ldots+x_n\mu_n$, где μ_i означает одноместную операцию $0\ldots 0x_{(i)}0\ldots 0\mu$. Если μ обладает также разложением вида $x_1\mu_1'+\ldots+x_n\mu_n'$, где операции μ_i' одноместны, то, подставляя $x_j=0\,(j\neq i)$ и $x_i=x$, получим, что $x\mu_i=0\ldots 0x_{(i)}0\ldots 0\mu=x\mu_i'$ $(i=1, \ldots, n)$, поэтому $x_1\ldots x_n\mu=x_1\mu_1+\ldots+x_n\mu_n$ есть единственное разложение операции μ в одноместные операции. Рассмотрим следующее отображение φ множества $O(\mathfrak{A})$ в множество $O(\mathfrak{R})$: если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы модуля, то $x_1\ldots x_n(\mu\varphi)=x_1\overline{\mu}_1+\ldots+x_n\overline{\mu}_n$, если μ — не нульместно (сложение в $\mathfrak{R}$ обозначается тоже через $+$), и $0\varphi=0$. Тогда, если операция μ одноместная, то $\mu\varphi=\overline{\mu}$. В частности, $\varepsilon\varphi=\overline{\varepsilon}$ (единица кольца R), откуда $x_1(+\varphi)\,x_2=x_1+x_2$. Отображение φ n-местную операцию переводит в n-местную. Кроме того, φ взаимно однозначно. Однозначность φ мы видели выше, а если $\mu\varphi=\nu\varphi$, то $x_1\overline{\mu}_1+\ldots+x_n\overline{\mu}_n=x_1\overline{\nu}_1+\ldots+x_n\overline{\nu}_n$, откуда, подставляя $x_j=0$ $(j\neq i)$, $x_i=x$, мы получим $x\overline{\mu}_i=x\overline{\nu}_i$, а так как это справедливо в любом R-модуле, в том числе и в самом кольце R, то $\overline{\mu}_i=\overline{\nu}_i$, т. е. $\mu_i=\nu_i\,(i=1, \ldots, n)$, откуда $\mu=\nu$.

Далее, φ отображает множество $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{R})$. Чтобы показать это, мы сперва покажем, что любая одноместная операция π класса $\mathfrak{R}$ имеет вид $x\bar{\varrho}$, где $\bar{\varrho}\in R$. Это очевидно для операций, задаваемых полиномом первой степени над системой операций, состоящей из сложения и умножений на элементы кольца R. Пусть π — одноместная операция, задаваемая полиномом степени n. Тогда $x\pi$ имеет один из следующих видов: $x\varrho_1+x\varrho_2$, $(x\varrho_1)\bar{\varrho}_3$, где ϱ_1, ϱ_2-операции, задаваемые полиномами степени меньше n, а $\bar{\varrho}_3\in R$. По индуктивному предположению $\varrho_i=\bar{\varrho}_i\in R\,(i=1, 2)$. Тогда из аксиом модуля вытекает, что соответственно $\pi=\bar{\varrho}_1+\bar{\varrho}_2\in R$, $\pi=\bar{\varrho}_1\bar{\varrho}_3\in R$. Пусть теперь $x_1\dots x_n\pi$ — произвольная операция класса $\mathfrak{R}$. Легко видеть, что $\mathfrak{R}$ является примитивным классом абелевых Ω-групп, поэтому имеет место следующее разложение: $x_1\dots x_n\pi=x_1\pi_1+\dots+x_n\pi_n$, где π_i — одноместные операции класса $\mathfrak{R}$ $(i=1,\dots,n)$. Значит, $x_1\dots x_n\pi=x_1\bar{\varrho}_1+\dots+x_n\bar{\varrho}_n$ $(\bar{\varrho}_i\in R;\ i=1,\dots,n)$, откуда, если в классе $\mathfrak{A}$ $x_1\varrho_1+\dots+x_n\varrho_n=x_1\dots x_n\varrho$, то $\varrho\varphi=\pi$.

Остается показать, что φ переводит тождества класса $\mathfrak{A}$ в тождества класса $\mathfrak{R}$ и что любое тождество класса $\mathfrak{R}$ получается отображением φ из некоторого тождества класса $\mathfrak{A}$. Пусть в классе $\mathfrak{A}$ имеет место тождество

$$s(x_1,\dots,x_j;\ \varrho_1,\dots,\varrho_m)=t(x_i,\dots,x_k;\ \varrho_l,\dots,\varrho_n). \tag{5}$$

Введем следующее обозначение: $s(0,\dots,0,x_{(p)},0,\dots,0;\ \varrho_1,\dots,\varrho_m)=x\sigma_p$. Аналогично определяются τ_q: $t(0,\dots,0,x_{(q)},0,\dots,0,\varrho_l,\dots,\varrho_n)=x\tau_q$. Тогда (5) можно записать в виде

$$x_1\sigma_1+\dots+x_j\sigma_j=x_i\tau_i+\dots+x_k\tau_k,$$

откуда

$$\begin{aligned} x\sigma_h&=0 \qquad (h=1,\dots,i-1),\\ x\sigma_h&=x\tau_h \qquad (h=i,\dots,j),\\ x\tau_h&=0 \qquad (h=j+1,\dots,k), \end{aligned} \tag{6}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_h&=0 \qquad (h=i,\dots,i-1),\\ \bar{\sigma}_h&=\bar{\tau} \qquad (h=i,\dots,j),\\ \bar{\tau}_h&=0 \qquad (h=j+1,\dots,k). \end{aligned} \tag{7}$$

Покажем, что в классе $\mathfrak{R}$ имеют место следующие тождества:

$$s(0,\dots,0,x_{(p)},0,\dots,0;\ \varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi)=x\bar{\sigma}_p \qquad (p=1,\dots,j). \tag{8}$$

Будем пользоваться индукцией по степени слова s над системой операций $\varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi$. Если s — слово первой степени, то

$$s(0,\dots,0,x_{(p)},0,\dots,0;\ \varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi)=s(0,\dots,0,x_{(p)},0,\dots,0;\ \varrho_1\varphi)=$$
$$=0\dots0x_{(l_1)}0\dots0x_{(l_r)}0\dots0(\varrho_1\varphi)=x\bar{\varrho}_{1l_1}+\dots+x\bar{\varrho}_{1l_r}=x\bar{\sigma}_p.$$

Если (7) справедливо для слов степени меньше n и s — слово степени n, то

$$\begin{aligned} &s(0,\dots,0,x_{(p)},0,\dots,0;\ \varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi)=\\ &=s'(s_{(1)}(0,\dots,0,x_{(i_1)},0,\dots,0;\ \varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi),\dots\\ &\dots,s_{(r)}(0,\dots,0,x_{(i_r)},0,\dots,0;\ \varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi),0;\ \varrho_s\varphi)=\\ &=s'(x\bar{\sigma}_{(1)i_1},\dots,x\bar{\sigma}_{(r)i_r},0;\ \varrho_s\varphi)=(x\bar{\sigma}_{(1)i_1})\bar{\varrho}_{s1_1}+\dots+(x\bar{\sigma}_{(1)i_1})\bar{\varrho}_{s1_{t_1}}+\\ &+\dots+(x\bar{\sigma}_{(r)i_r})\bar{\varrho}_{sr_1}+\dots+(x\bar{\sigma}_{(r)i_r})\bar{\varrho}_{sr_{t_r}}=\\ &=x(\overline{\sigma_{(1)i_1}\varrho_{s1_1}+\dots+\sigma_{(1)i_1}\varrho_{s1_{t_1}}+\dots+\sigma_{(r)i_r}\varrho_{sr_1}+\dots+\sigma_{(r)i_r}\varrho_{sr_{t_r}}})=x\bar{\sigma}_p, \end{aligned}$$

ибо

$$\begin{aligned} &x(\sigma_{(1)i_1}\varrho_{s1_1}+\dots+\sigma_{(1)i_1}\varrho_{s1_{t_1}}+\dots+\sigma_{(r)i_r}\varrho_{sr_1}+\dots+\sigma_{(r)i_r}\varrho_{sr_{t_r}})=\\ &=(x\sigma_{(1)i_1})\varrho_{s1_1}+\dots+(x\sigma_{(1)i_1})\varrho_{s1_{t_1}}+\dots+(x\sigma_{(r)i_r})\varrho_{sr_1}+\dots+(x\sigma_{(r)i_r})\varrho_{sr_{t_r}}=\\ &=s'(x\sigma_{(1)i_1},\dots,x\sigma_{(r)i_r},0;\ \varrho_s)=s'(s_{(1)}(0,\dots,0,x_{(i_1)},0,\dots,0;\ \varrho_1,\dots,\varrho_m),\dots\\ &\dots,s_{(r)}(0,\dots,0,x_{(i_r)},0,\dots,0;\ \varrho_1,\dots,\varrho_m),0;\ \varrho_s)=\\ &=s(0,\dots,0,x_{(i)},0,\dots,0;\ \varrho_1,\dots,\varrho_m)=x\sigma_p. \end{aligned}$$

В силу соотношений (7) и (8) мы получим:

$$\begin{aligned} &s(x_1,\dots,x_j;\ \varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi)=s(x_1,0,\dots,0;\ \varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi)+\dots\\ &\dots+s(0,\dots,0,x_j;\ \varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi)=x_1\bar{\sigma}_1+\dots+x_j\bar{\sigma}_j=\\ &=x_i\bar{\tau}_i+\dots+x_k\bar{\tau}_k=t(x_i,0,\dots,0;\ \varrho_l\varphi,\dots,\varrho_n\varphi)+\dots\\ &\dots+t(0,\dots,0,x_k;\ \varrho_l\varphi,\dots,\varrho_n\varphi)=t(x_i,\dots,x_k;\ \varrho_l\varphi,\dots,\varrho_n\varphi). \end{aligned}$$

С другой стороны, если в классе $\mathfrak{R}$ имеет место тождество

$$s(x_1,\dots,x_j;\ \varrho_1\varphi,\dots,\varrho_m\varphi)=t(x_i,\dots,x_k;\ \varrho_l\varphi,\dots,\varrho_n\varphi),$$

то в силу (8)

$$x_1\bar{\sigma}_1+\dots+x_j\bar{\sigma}_j=x_i\bar{\tau}_i+\dots+x_k\bar{\tau}_k,$$

откуда следуют равенства (7). Это значит, что в классе $\mathfrak{A}$ имеют место тождества (6). Получим:

$$\begin{aligned} &s(x_1,\dots,x_j;\ \varrho_1,\dots,\varrho_m)=x_1\sigma_1+\dots+x_j\sigma_j=\\ &=x_i\tau_i+\dots+x_k\tau_k=t(x_i,\dots,x_k;\ \varrho_l,\dots,\varrho_n), \end{aligned}$$

т. е. в классе $\mathfrak{A}$ выполняется тождество (5).

Нам нужно еще доказать, что если P такое ассоциативное кольцо с единицей, что примитивный класс $\mathfrak{P}$ всех правых унитарных P-модулей эквивалентен классу $\mathfrak{A}$, то $P\cong R$. Пусть φ — взаимно однозначное отображение множества $O(\mathfrak{A})$ на множество $O(\mathfrak{P})$, определяющее эквивалентность классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{P}$. Учитывая, что, как показано выше, одноместными операциями класса $\mathfrak{P}$ являются лишь умножения на элементы кольца и что отображение φ n-местную операцию переводит в n-местную, мы видим, что φ взаимно однозначно отображает R на P.

Покажем, что φ — гомоморфное отображение кольца R. Операция 0 класса $\mathfrak{A}$ при φ переходит в 0 класса $\mathfrak{P}$. Поэтому из тождества класса $\mathfrak{A}$ $x+0=0+x=x$ получается тождество класса $\mathfrak{P}$

$$x(+\varphi)\,0=0\,(+\varphi)\,x=x. \tag{9}$$

Обозначая через $\oplus$ сложение класса $\mathfrak{P}$, в $\mathfrak{A}$, как показывает (4), тождественно выполняется

$$(x+0)\,(\oplus\varphi^{-1})\,(0+y)=(x(\oplus\varphi^{-1})\,0)+(0(\oplus\varphi^{-1})\,y).$$

Применяя к этому тождеству отображение φ, получим:

$$(x(+\varphi)\,0)\oplus(0(+\varphi)\,y)=(x\oplus 0)\,(+\varphi)\,(0\oplus y).$$

Это последнее в силу (9) означает, что в $\mathfrak{P}$ тождественно $x(+\varphi)\,y=x\oplus y$.

Пусть теперь $\mu, \nu\in R$ (черточку здесь можем упустить). В классе $\mathfrak{A}$ имеет место тождество $x(\mu+\nu)=x\mu+x\nu$, откуда в $\mathfrak{P}$ получим: $x(\mu+\nu)\,\varphi=$ $=x(\mu\varphi)\oplus x(\nu\varphi)=x(\mu\varphi+\nu\varphi)$, значит, $(\mu+\nu)\,\varphi=\mu\varphi+\nu\varphi$. Наконец, рассмотрим в $\mathfrak{A}$ тождество $x(\mu\nu)=(x\mu)\,\nu$. При φ оно превращается в тождество класса $\mathfrak{P}: x(\mu\nu)\,\varphi=(x(\mu\varphi))\,(\nu\varphi)=x((\mu\varphi)\,(\nu\varphi))$. Отсюда, $(\mu\nu)\,\varphi=(\mu\varphi)\,(\nu\varphi)$.

Этим доказано, что φ гомоморфизм, а ввиду взаимной однозначности и изоморфизм R на P. Итак, теорема полностью доказана.

Следствие. Примитивный класс алгебр $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда эквивалентен примитивному классу всех правых унитарных модулей над некоторым ассоциативным кольцом с единицей, если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I—IV.

Заметим, что лемма 2, теорема 1 и следствие остаются в силе, если условие II заменим

II′. В любой алгебре из $\mathfrak{A}$ каждая конгруэнция однозначно определяется своим классом, являющимся нормальной подалгеброй.

§ 5

В работах [5], [6] К. Шода доказал следующую теорему:

Каждая алгебра A в примитивном классе $\mathfrak{A}$, удовлетворяющем условиям I, II′, III, IV, обладает алгебраически замкнутым алгебраическим расширением в этом классе, притом единственным с точностью до изоморфизма над A (относительно терминологии см. [5]).

С другой стороны, Б. Экман и А. Шопф [3] получили следующий результат:

Каждый унитарный модуль M над ассоциативным кольцом с единицей R обладает инъективным существенным расширением над R, единственным с точностью до изоморфизма над M.*)

Мы покажем на основании предыдущих теорем, что эти результаты равносильны. В самом деле, пусть A — алгебра в некотором примитивном классе $\mathfrak{A}$, удовлетворяющем условиям I, II′, III, IV. В силу следствия, приведенного в конце § 4, существует такое ассоциативное кольцо с единицей R, что $\mathfrak{A}$ эквивалентен примитивному классу всех унитарных модулей над R. Поэтому существует унитарный R-модуль A', эквивалентный алгебре A. Согласно [3] A' обладает инъективным существенным расширением над R, т. е. существует такой унитарный R-модуль A'^*, который в качестве подмодуля содержит A', не содержит никакого прямого расширения модуля A', и является прямым слагаемым в каждом собственном расширении. Возьмем в классе $\mathfrak{A}$ алгебру A^*, эквивалентную модулю A'^*. Тогда A вложима в A^*, притом A^* не содержит никакого прямого расширения алгебры A и является прямым слагаемым в каждом собственном расширении. Поэтому, в силу теорем 1, 7, 9 из [5], A^* есть алгебраически замкнутое алгебраическое расширение алгебры A. Единственность же алгебры A^* является следствием единственности модуля A'^*. Таким образом, результат Шода вытекает из результата Экмана и Шопфа.

С другой стороны, поскольку в примитивном классе всех унитарных R-модулей выполняются условия I—IV, а понятие алгебраически замкнутого алгебраического расширения здесь совпадает с понятием инъективного существенного расширения, то результат Экмана и Шопфа вытекает из теоремы Шода.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность А. Г. Курошу за ряд ценных советов и указаний.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Мальцев, К общей теории алгебраических систем, Мат. Сборник, **35 (77)** (1954), 3—20.
[2] P. J. Higgins, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **6** (1956), 366—416 (перевод: Математика, **3** : 4 (1959), 55—106).
[3] B. Eckmann—A. Schopf, Über injektive Moduln, *Archiv der Math.*, **39** (1953), 75—79.
[4] K. Shoda, Allgemeine Algebra, *Osaka Math. J.* **2** (1949), 182—225.
[5] K. Shoda, Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, *Osaka Math. J.*, **4** (1952), 133—143.
[6] K. Shoda, Bemerkungen über die Existenz der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung, *Proc. Japan Acad.*, **31** (1955), 128—130.
[7] T. Fujiwara, On the structure of algebraic systems, *Proc. Japan Acad.*, **30** (1954), 74—79.

(Поступило 6/VII/1961)

*) В цитированной работе речь идет о левых модулях, но это в данном случае не существенно.