A GÖMB MOZGÁSCSOPORTJA

A következő halmazok között természetes módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető:

(a) A háromdimenziós euklideszi tér adott fixpontú összes távolság- és irányítástartó transzformációi.
(b) A (háromdimenziós) gömb összes olyan mozgásai, amelyek a gömböt önmagába viszik át.
(c) Az összes 3×3 típusú 1 determinánsú ortogonális valós mátrixok.

Mindegyik halmaz csoport a leképezés- ill. mátrix-szorzásra nézve. Ez a három csoport izomorf, tehát algebrai szempontból ugyanaz. Neve: *a gömb mozgáscsoportja*; leginkább használt jele: $O_3^+(\mathbf{R})$.

Tétel: $O_3^+(\mathbf{R})$ egyszerű.

A tételt már Camille Jordan ismerte. "Geometric Algebra" című könyvében Emil Artin olyan bizonyítást ad rá, amely szellemében megegyezik az alternáló csoportok egyszerűségének Bauer–Rédei-féle bizonyításával. Mindkét bizonyítás a következő egyszerűségi kritériumon alapul:

Legyen Σ csoportelemek olyan tulajdonsága, hogy Σ a konjugáltakra öröklődik, továbbá a csoportot az összes Σ tulajdonságú elemei generálják. Ha a G csoport minden legalább kételemű normálosztójában van Σ tulajdonságú elem, akkor G egyszerű.

Az említett egyszerűség-bizonyításokban Σ-t így definiálhatjuk: az alternáló csoportokban legyen egy permutáció Σ tulajdonságú, ha $(ab)(cd)$ alakú; $O_3^+(\mathbf{R})$ egy eleme pedig akkor legyen Σ tulajdonságú, ha a gömb valamely átmérője körüli, π szöggel való elforgatás (azaz e tengelyre vonatkozó tükrözés).

Kenkichi Iwasawa japán algebrista 1941-ben felfedezte a következő, kicsit bonyolultabban hangzó, de egyszerűen bizonyítható és jól használható egyszerűségi kritériumot, amellyel akkor bizonyos klasszikus csoportok, nevezetesen a projektív terek kollineációcsoportjai és a projektív szimplektikus csoportok egyszerűségét igazolta, a korábbi bizonyításoknál lényegesen egyszerűbben:

Legyen az M halmaz Γ transzformációcsoportja primitív (azaz *ne* őrizze meg M-nek nemtriviális osztályozását). Ha

(1) Γ megegyezik kommutátorcsoportjával (azaz Γ-t generálják összes $[\alpha, \gamma] = \alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\gamma$ alakú *kommutátor-elemei*), és
(2) M-nek létezik olyan A eleme, hogy A *stabilizátorának* (az A-t változatlanul hagyó, Γ-hoz tartozó transzformációkból álló csoportnak) van olyan Abel-féle normálosztója, amelynek összes Γ-beli konjugáltjai együtt generálják Γ-t,

akkor Γ egyszerű.

Iwasawa kritériumát alkalmazták más klasszikus csoportokra is. Emellett az alternáló csoportok egyszerűsége is elegánsan – bár a Rédei-féle bizonyításnál nem rövidebben –

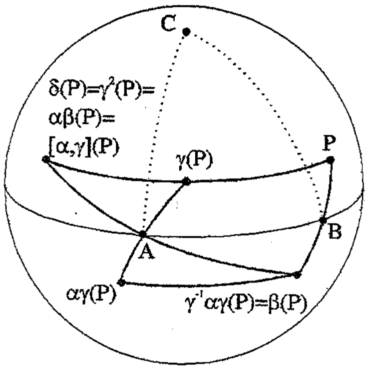
igazolható általa. A következőkben a gömb mozgáscsoportja egyszerűségének szemléletes bizonyítására használjuk. Ehhez a következő geometriai észrevételekre lesz szükség:

I. A gömböt önmagába átvivő mozgások (a továbbiakban röviden: *a mozgások*) mind a gömb egy-egy átmérője körüli forgatások. (Ez a tény Euler óta ismert; $O_3^+(\mathbf{R})$ (c) alakjából elemi polinom-algebra és lineáris algebra alkalmazásával is következik.)

II. Ha az U, V és V, W gömbfelületi pontok távolsága ugyanaz, akkor van olyan mozgás, amely U-t V-be, V-t W-be viszi át.

III. Minden mozgás valamely mozgás négyzete. (Ez I.-ből nyilvánvaló.)

IV. Minden mozgás bizonyos mozgások kommutátora. (III. figyelembevételével ez leolvasható az ábráról: tetszőleges δ mozgásra $\delta = \gamma^2 = \alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\gamma$, ahol γ a C "pólus" körüli BA szögű forgatás, míg α (ill. β) az A (ill. B) "egyenlítői" pont(on átmenő átmérő) körüli π szögű forgatás.)



V. Bármely két π szögű forgatás konjugált. (Lásd az ábrát: $\beta = \gamma^{-1}\alpha\gamma$.)

VI. Minden mozgás π szögű forgatások szorzata. (Lásd az ábrát: $\delta = \alpha\beta$.)

A tétel bizonyítása: $O_3^+(\mathbf{R})$ a gömbfelület pontjai M halmazának primitív transzformációcsoportja. Valóban, tartozzanak a d (> 0) távolságú $U, V \in M$ pontok M egy, $O_3^+(\mathbf{R})$ által megőrzött osztályozásának ugyanabba az osztályába, és legyen $Z \in M$ tetszőleges. Az U pontból Z elérhető d távolságú "araszolással", másszóval van olyan véges $U, V, W, \ldots, Z$ $(\in M)$ pontsorozat, amelyben a szomszédos pontok távolsága d. Akkor II. szerint Z is ugyanabba az osztályba tartozik, mint U és V, tehát osztályozásunk egyetlen osztályból áll, azaz triviális. (Itt felhasználtuk a valós számokra vonatkozó arkhimédeszi axiómát, amely nem kerülhető meg, hiszen $O_3^+(\mathbf{R})$ *folytonos csoport*).

Teljesül (1): $O_3^+(\mathbf{R})$ megegyezik kommutátorcsoportjával IV. szerint.

Teljesül (2) is: bármely $A \in M$ stabilizátora éppen az A "pólus" körüli forgatások alkotta részcsoport G-ben. Ez Abel-féle normálosztója önmagának, s elemei közül már az egyetlen π szögű forgatás összes konjugáltjai is generálják Γ-t V. és VI. szerint. ∎