Tartalomjegyzék

Bevezetés

Elterjedt és nem teljesen alaptalan vélekedés, hogy a matematikához istenadta tehetség kell. Azokban, akik matematikatanárnak készülnek, ez bizonyára megvan, hiszen ha nem lettek volna jó feladatmegoldók az iskolában, aligha merték volna ezt a pályát választani. Hogy ez a sok gyerekben meglévő, és az élet minden területén kamatoztatható adottság minél előbb kibontakozzék, annak nem elhanyagolható feltétele — habár nem szükséges és nem is elegendő — hogy a matematikát olyan tanártól tanulják, aki ki tudja fejleszteni a bennük lappangó tehetséget. Könyvünk szeretne segíteni abban, hogy erre felkészült tanárok tanítsák a matematikát.

E magas célja mellett van egy földhözragadtabb is: összefoglalni, szintetizálni az egyetemen hallott matematikai anyagot, hogy a tanárjelölt megfelelően elrendezett tudás birtokában mehessen el az utolsó egyetemi megmérettetésre, a záróvizsgára. Ezt a szintézist a hallgató nem kaphatja meg az egyes féléves előadások során, és nincsenek külön szintetizáló előadások sem. Könyvünk azok számára lesz a leghasznosabb, akik maguk is megpróbálkoznak a szintézissel, végiggondolják, miről beszélhetnének a 18 vizsgatétel kapcsán, s utána szembesítik elképzeléseiket a könyv fejezeteivel. Akinek erre nem jut ereje, vagy ideje, azon a könyv még mindig segíthet. Persze, többet segít annak, aki nem az utolsó két hétben próbálja memorizálni a tartalmát, hanem legalábbis a záróvizsga előtti félév során rendszeresen tanulmányozza. Reménykedem azonban, hogy a könyv még azok számára is nyújt kapaszkodót, akik csak azért jutottak el a záróvizsgáig, mert a vizsgaeredmény olyan véletlen változó, amelynek nagy a szórása. Belőlük is válhat jó matematikatanár.

Bárki megkérdezhetné: hát ennyi az egész, amit egy leendő középiskolai tanárnak tudnia kell? Hiszen ezt a kétszáz oldalt „be lehet vágni" tíz nap alatt, aztán el lehet menni vizsgázni belőle. Attól tartok, hogy ez nem így van. Ez a könyv főleg azoknak szól, akik a tartalmát, vagy annak legalább 90 százalékát, egyszer vagy kétszer, kollokviumra vagy szigorlatra készülve részletekben már meggondolták, megtanulták, aztán, meglehet, nagy részét el is felejtették. De a tudás nem vész el, csak lapul az agysejtek szövetében. A könyv egyik célja, hogy ezt a rejtőzködő tudást életre keltse.

Matematika záróvizsgán a diákok nagy többsége — szerencsére — életében egyszer esik át, ezért az esemény titokzatosnak látszik: mit kell ott tudni, hogyan zajlik az egész? Néhány gyakran feltett kérdésre itt is válaszolhatunk. Minek a bizonyítását kérdezhetik a záróvizsgán? Ritka eset, hogy bizonyítást kérdeznek, s ha igen, akkor is csak olyan egyszerű és alapvető dolgokét, mint pl. azét, hogy végtelen sok prímszám van. Azt viszont értékelni szokták, ha a vizsgázó nevezetes összefüggések ismertetésekor, amelyek bizonyításának történetesen létezik egy-két mondatban összefoglalható alapgondolata, ezeket a mondatokat minden külön kérés nélkül elmondja. Ebből baj nem lehet; olyan vizsgáztatóval még nem ültem együtt, aki erre így reagálna: „Igen? Akkor fejtse csak ki ezt teljes részletességgel!". Az a megjegyzés elképzelhető, hogy „hát erre nem egészen pontosan tetszik emlékezni... mi a következő dolog, amiről beszélni akar?" Hogy még ez se forduljon elő, sok jelentős tétel kimondása után egy-két (de legfeljebb három) mondatban utalunk a bizonyítás ötletére. Ha egy állításról ebben a könyvben csak annyit olvashatunk, hogy „igazolható", akkor az állítás igazolását komoly vizsgáztató — aki még világosban szeretne hazaérni — nem fogja kérni.

A matematika egyetemi tananyagban szereplő fejezeteit többféleképpen lehet és szokás tárgyalni. Semmi sem biztosítja, hogy az olvasó tanára ugyanazt a felépítést használta, mint e könyv szerzője. (Azt sem, hogy ugyanazokat a jelöléseket használta.) Ne aggódjunk emiatt. Mint Pascal írta Fermatnak, „az igazság ugyanaz Toulouse-ban, mint Párizsban"; a különböző felépítések és jelölések mögött ugyanaz a matematikai igazság áll. Gyakran a kissé különböző definíciók mögött is: egy kedves kollégám pl. a 0-t természetes számnak tekinti, én meg nem. Ezt sem egymástól, sem az esetleg más véleményen levő diáktól nem szoktuk rossz néven venni.

Bizonyos ismereteinket — pl. a vektorokra vonatkozókat — több vizsgatétellel kapcsolatban is „bevethetjük". Ezek egyik-másika könyvünkben is többször szerepel, néha több oldalról megközelítve.Sok esetben hivatkozunk egy másik vizsgatételre, amelyben az éppen tárgyalt összefüggés ugyancsak előfordul.

Az általános és középiskolák szokásos matematika-anyagára esetenként mint iskolai matematikára utalunk. Az „iskolai" jelző nem fejez ki sem lebecsülést, sem elismerést — azért van rá szükségünk, hogy a záróvizsga anyagának és a leendő tanár által megtanítandó anyagnak a kapcsolataira rámutassunk. Mindenképpen célszerű záróvizsga előtt az általános és középiskolai anyagot is feleleveníteni (a számokra vonatkozó ismereteket pedig a könyv függelékében átnézni — ha valakiről a záróvizsgán derül ki, hogy nem tud komplex számokkal számolni, reménytelen azzal védekeznie, hogy „az nem vizsgatétel"). Az iskolai tananyagot illetően a jelen könyv nem nyújt segítséget; ki-ki szedje elő iskolai tankönyveit. Ugyancsak hasznos lehet Varga Tamás Matematika című lexikonjának forgatása (Műszaki Könyvkiadó, 2001). Emellett a használatban lévő matematikai képlettárat sem árt végignézni.

Egyes tényeket kétféleképpen is megfogalmazunk, nemcsak biztosabb felelevenítésük, hanem a matematikai szakzsargon gyakorlása céljából is (ami sohasem árt és sohasem késő). A tanárjelöltek záróvizsgája bizonyos értelemben nyelvvizsga is: egyebek között azt méri, a vizsgázók milyen szinten beszélik szakterületük magyar nyelvét. Ehhez segítséget jelenthet, ha formailag különböző, de ugyanolyan jelentésű matematikai mondatokat mutatunk be.

Ha valaki valamelyik fejezetben olyan ismeretekkel is találkozik, amelyeket eddigi vizsgáira készülve még sohasem kellett elsajátítania, ezeket is olvassa végig. Hátha a vizsgáztató fel sem tételezi, hogy a szóban forgó fontos (?) anyag véletlenül minden tantárgyból kimaradt. Lehet, hogy ez tényleg így volt, de kissé kényelmetlen ezt a körülményt a vizsga során bizonygatni.

Sajnálatos módon az egyik leggyakoribb szó e könyvben a definíciók igéje, a „nevezzük". Nagyon sok fogalomra kell emlékezni egy záróvizsgán. Még azt az enyhítő elvet sem alkalmazhattam, amely természetes egy tudományos monográfia esetében: ott csak azokat a fogalmakat definiálják, amelyekre a könyv hátralévő részében is szükség lesz. Kutató számára gazdaságos stratégia lehet, ha csak az éppen folyó kutatásához szükséges ismereteket sajátítja el. Tanárt „hallottam róla" jellegű ismeretek is segíthetik munkájában.

Hogyan vizsgázzunk? Elárulok egy titkot: a vizsgáztató bizottság akkor boldog, ha a vizsgázó szájából olyan előadást hall, amelybe nem kell tíz másodpercenként belekérdezni. (Így van ezzel többnyire a vizsgázó is.) És a vizsgáztató lelkiállapota befolyásolhatja az egyébként bizonyára nagy objektivitással megállapított érdemjegyet. Természetesen, senki se igyekezzék a következő 18 kis előadást mondatról mondatra megtanulni, inkább próbáljon ezekhez hasonló tartalmú kis előadásokat önmaga (és a bizottság) számára önállóan összeállítani.

Merjünk a vizsgán egyszerű dolgokról is beszélni! Ne féljünk attól, hogy a bizottság ezt gyenge felkészülésünk jelének tekinti. Matematikus vizsgáztatót szakmailag értelmes mondatszövéssel sokkal inkább el lehet bűvölni, mint bonyolult anyag „felmondásával". Az persze előfordulhat, hogy pl. a halmaz szemléletes fogalmának olyan részletes ismertetését, amilyet a 17. fejezet elején találunk, a vizsgáztatók félbeszakítják, és megkérik a vizsgázót, térjen át az anyag valamely hangsúlyosabb részére. Ez más fejezetekre is vonatkozik. Jó néhány fejezet tartalmaz aprólékoskodónak tűnő bevezetést, amelynek átolvasása segítheti a jobb megértést, de amelyet vizsgázás közben magam is valószínűleg egy-két mondatba sűríteném.

A vizsgáztatók — csakúgy, mint a tanulók — nagyra értékelik a stabil tudást. Aki a vizsgán a tanár arckifejezését vizsgálva próbálja újra fogalmazni mondatait, jó esetben is csak szánalmat vált ki. Sajátítsuk el olyan mértékben az anyagot, hogy a vizsga izgalmai közepette is merjünk egy kicsit gondolkozni a feltett kérdéseken. Törekedjünk erre céltudatosan, hogy később tanárként se szeppenjünk meg értelmes diákjaink váratlan kérdéseitől.

Ez a könyv nem tankönyv, nem arra szolgál, hogy korábban nem is hallott tényeket és kapcsolataikat belőle tanuljuk meg. Nem is monográfia: nem vezérfonal valamely szűkebb szakterület önálló tanulmányozásához. Ez a könyv csak emlékeztető, segédlet arra, hogy már hallott dolgokat felidézzünk (erre a célra záróvizsga után is megfelel), illetve rendszerezzünk. Ha nincs mire emlékeztessen, még akkor is tájékoztat arról, mit kellett volna megtanulni korábban, és ez sem haszontalan. Tankönyvben, monográfiában elképzelhetetlen, hogy olyan fogalmat használjunk, amelynek a definíciója 50 oldallal később következik. Itt ez természetes; gondoljunk csak arra, hogy a halmazelmélet és a matematikai logika — tehát a matematika alapjai — a két utolsó vizsgatétel.

Másrészt, ez a könyv nem tudós tanár kollégáimnak szól. Ha mégis kézbeveszik, ne botránkozzanak meg azt tapasztalván, hogy hiába keresnek benne egyes, szakmai körökben közismert matematikai igazságokat, másoknak meg csak egyszerű speciális esetét találják. Fájó szívvel, de kihagytam belőle még az algebra — saját szakterületem — számos olyan gyöngyszemét is, amelyet pedig a tanulmányai ötödik évéhez eljutott egyetemi hallgató nagyobb nehézség nélkül el tudna sajátítani. Lehetetlen egy rövid könyvecskét úgy megírni, hogy minden benne legyen, amit egy leendő középiskolai matematikatanárnak tudnia illik. Ami benne van, arra is érvényes Hurwitz intése: „A matematika tanítása közben mindig igazat mondjunk, és csak az igazat, de ne mindig a teljes igazságot." Ennek megfelelően őrizkedtem attól, hogy az emlékezetben tartandó fogalmakat a legtömörebben definiáljam, s attól is, hogy a tételeket legélesebb alakjukban mondjam ki. Feltűnhet, hogy folytonosan differenciálhatóságot kötök ki olyan helyen, ahol az állítás valamivel kevesebb feltevésből is következik. Másik példa: a csoportműveletet nem úgy definiálom, mint olyan asszociatív műveletet, amelyre vonatkozóan létezik legalább egy olyan baloldali egységelem, amelyre vonatkozóan minden elemnek van legalább egy baloldali inverze. Pedig ezek az apróságok az analízis meg az algebra szakembere számára nagyon szépek, csak éppen nem tartoznak a leendő matematikatanár mindennapos szakmai fegyverzetéhez.

Végül egy apró gyakorlati tanács: van tárgymutató, forduljunk hozzá, ha fogalmakkal vagy tételek elnevezésével van problémánk. A tárgymutató egyben névmutató; abban is segít, hogy a jeles tudósok nevével fémjelzett összefüggések vagy módszerek felfedezésének korszakáról is legyen elképzelésünk. (Ha nincs évszám, mindig huszadik századi matematikusról van szó.)