GRÁFELMÉLET

MÁSODIK ELŐADÁS, 2020. SZEPTEMBER 16.

1. Még fákról

Tétel: Tfh. $n \geq 2$. A $d_1 \leq \dots d_n$ természetes számokból álló sorozat pontosan akkor valósítható meg fával, ha $d_1 > 0$ és $\sum d_i = 2n - 2$.

Bizonyítás: Mivel fákra teljesül, hogy a legkisebb fok is ≥ 1 (nincs izolált pont fákban), és az élek száma $n - 1$, az egyik irány kész.

Most feltesszük, hogy a d_i számokra teljesül a tétel állítása. Az $n = 2$ eset triviális, hisz egyetlen megoldás van csak a sorozat elemeire: $d_1 = d_2 = 1$, ami az egyetlen két pontú fa fokszámsorozata is egyben. Innentől $n \geq 3$.

Indukcióval bizonyítunk. Vegyük észre, hogy a feltételekből következik: $d = 1$ (nem lehet $d_1 \geq 2$, akkor túl nagy volna a fokok összege), és $d_n \geq 2$ (ha $d_n = 1$ volna, minden i-re $d_i = 1$ volna, de az összeg ekkor túl kicsi volna). Készítünk egy új sorozatot. Eldobjuk d_1-et, és 1-gyel csökkentjük d_n-et. Kapjuk a $d_2, d_3, \dots, d_{n-1}, d_n - 1$ sorozatot. Ezeke közül a legkisebb is ≥ 1 (hisz $d_n \geq 2$ volt), és az összegük $2(n-1) - 2 = 2(n-2)$. Az indukcós feltevés alapján ez a számsorozat megvalósítható egy T' fával. Legyen x az a pont T'-ben, amelyiknek $d_n - 1$ a foka. Felveszünk egy új pontot, y-t. Összekötjük x-szel. Kapunk egy T fát (összefüggő és körmentes, tehát fa), melynek a fokszámsorozata éppen a $d_1, d_2, \dots, d_n$ számsorozat. $\square$

2. Címkézett feszítőfák K_n-ben

Tekintsük az n pontú teljes gráfot, K_n-et. Számozzuk meg a csúcsait 1-től n-ig. Ebben keressük a különböző feszítőfákat – két fa különböző lesz akkor is, ha izomorfak, de a címkézésüket is tekintve már nem azok. Pl. K_3-nak 3 különböző címkézett feszítőfája van, ezt könnyű ellenőrizni.

Nem volt előadáson, így nem kell tudni a következő tételt:
Tétel: Tfh. $n \geq 2$. Legyen $\{d_i\}_{i=1}^n$olyan természetes számokból álló sorozat, melyre $d_1 > 0$ és $\sum d_i = 2n - 2$. Ekkor a $\{d_i\}_{i=1}^n$ sorozatot megvalósító fák száma

$$(n-2)! \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(d_i - 1)!}.$$

Cayley-tétel: K_n címkézett feszítőfáinak száma n^{n-2}.

A Cayley-tételt bebizonyíthatjuk például az előző tétel segítségével, leszummálva az ott adott értéket minden feszítőfához tartozó $\{d_i\}_{i=1}^n$ fokszámsorozatra.

Megjegyzés: Nem izomorf feszítőfákból jóval kevesebb van, hiszen pl. egy tetszőleges feszítőfából könnyen kaphatunk akár nagyon sok különböző címkézett fát, ha minden lehetséges módon átcímkézzük a pontjait. Ezzel együtt K_n nem izomorf feszítőfáinak száma még mindig óriási!

A Cayley-tételt az alábbi Prüfer-kódoló algoritmus segítségével bizonyítottuk.

Prüfer-kódolás: Vegyük le a legkisebb indexű levelet, és írjuk a már meglévő kódhoz hozzá a szomszédja indexét, amíg legalább három pontja van a fának. Ha már csak két pont maradt, megállunk, kész a fa Prüfer-kódja[1].

A Prüfer-kód egyértelműen visszafejthető. Az algoritmus elemzése alternatív bizonyítást ad a Cayley-tételre, hiszen az összes lehetséges n^{n-2} különböző $n-2$ hosszú kódsorozat, azaz az $\{1,\ldots,n\}^{n-2}$ halmaz és K_n címkézett feszítőfái között a Prüfer-kódolás egy bijektív leképezés.

3. Éltesztelés

Kezdetek, motiváció: Kombinatorikus csoport tesztelési módszer fertőző beteg megtalálására; N elemű csoportra $1+\log_2 N$ teszt elegendő (ennél kevesebb pedig nem is lehet elég, ez az úgynevezett információelméleti alsó korlát).

Szorosan kapcsolódó mérnöki probléma a *hibakeresés optikai hálózatokban*:

Feltevések: (1) összefüggő részgráfok gyorsan tesztelhetők úgynevezett monitorozó fényutakkal; (2) egyszerre legfeljebb egy meghibásodott él van.

Feladat: egyértelműen azonosítani a hibás élt, ha van hiba, méghozzá minél kevesebb összefüggő részgráfhoz tartozó monitorozó fényúttal (a fényút nem feltétlenül jelent gráfelméleti értelemben vett utat, de mindenképpen séta). Ha nincs hibás él, arról is tudnunk kell.

Könnyű látni: Ha a teszteknek nem kellene összefüggő részgráfoknak lenniük, akkor egy G gráfhoz elég lenne $1+\log_2 e(G)$ teszt (ennél kevesebb pedig nem is lehet elég, ld. fent). Ehhez a *bináris kódkiosztó* módszert használhatjuk, mely a következő:

az éleket megszámozzuk 1-től $e(G)$-ig, majd ezeknek a számoknak a bináris alakját tekintjük. Az i-edik tesztben azok az élek szerepelnek, amiknek a bináris sorszámában az i-edik helyiértéken 1-es van.

Ezekkel a tesztekkel valóban egyértelműen azonosíthatjuk az éleket. A baj az, hogy általában az így megadott tesztek nem adnak összefüggő részgráfot, lásd pl. P_n-et, az n pontú utat. Az út esetében mindegy, hogyan számozzuk meg az éleket, a bináris kódkiosztó módszerrel kapott élhalmazok java része nem lesz összefüggő, ha $n>3$ – azaz a módszer utakra nem segít.

Van azért olyan viszonylag általános eset, amikor a bináris kódkiosztás kicsit megváltoztatva majdnem optimális megoldást ad:

[1] Könnyű látni, hogy egy $n \geq 2$ csúcsú fára az $(n-1)$-edik szám mindig n volna úgyis.

Tétel: *Tfh. G olyan gráf, mely tartalmaz két éldiszjunkt feszítőfát, legyenek ezek T_1 és T_2. Ekkor $2 + 2\log_2\lceil e(G)/2\rceil$ összefüggő teszt elég G éleinek teszteléséhez.*

Bizonyítás: Először vágjuk két egyforma (vagy majdnem egyforma, ha paritás miatt egyformák nem lehetnek) méretű részre az $E(G) - E(T_1) - E(T_2)$ élhalmazt. Jelölje a két részt E'_1 és E'_2. Most legyen

$$E_1 = E'_1 \cup E(T_1)$$

és

$$E_2 = E'_2 \cup E(T_2).$$

Ezekután E_1-re és E_2-re külön adjuk meg az összefüggő teszteket. Azzal kezdjük, hogy E_1 élei között tetszőlegesen kiosztjuk a bináris kódokat (a már korábban említett megszámozást használjuk). Majd ugyanezt végrehajtjuk E_2-re is, binárisan megszámozzuk az éleit. Fontos: a T_1 és T_2 éleinek egyike se kapja a csupa 1-es kódot, különben a fák meghibásodásánál nem sikerül az egyértelmű azonosítás (miért is?).

Az E_1 éleire a tesztek a következők: az i-edik teszt E_1 azon éleit tartalmazza, melyek kódjának az i-edik helyiértékén 1-es található, és emellett a T_2 fa minden élét. Mivel T_2 feszítőfa, így minden teszt összefüggő lesz, mivel mind tartalmazza T_2-t. Hasonlóan teszünk E_2-vel, csak itt az egyes helyiértékek által kijelölt élhalmazokhoz mindig T_1-et vesszük hozzá. Külön-külön mindkét élhalmazt tudjuk így tesztelni (miért?), mindkét teszthalmaz $1 + \log_2\lceil e(G)/2\rceil$ összefüggő tesztet tartalmaz, ahonnan már jön a tétel. $\square$

Megjegyzés: Ha G 4-szeresen összefüggő[2], akkor biztosan van benne két éldiszjunkt feszítőfa. Ez elégséges, de nem szükséges feltétel.

[2] A folyamok tárgyalásánál beszélni fogunk a többszörös összefüggőségről.