GRÁFELMÉLET

ELSŐ ELŐADÁS, 2020. SZEPTEMBER 9.

1. Alapfogalmak, fák

Definíciók:

- irányítatlan és irányított gráf, $G = (V, E)$, $V = V(G)$ a csúcshalmaz, $E = E(G)$ az élhalmaz; $v(G) = |V(G)|$, $e(G) = |V(G)|$

- szomszédsági reláció, $x \in V$ szomszédsága: $N(x) = \{y \in V :\ xy \in E\}$

- $x \in V$ foka: az x-re illeszkedő élvégpontok száma (a hurokélek kettővel növelik a fokot, a többi eggyel); jele: $d(x)$, vagy ha több gráffal dolgozunk: $d_G(x)$

- gráfok reprezentációi: szomszédsági mátrix, illeszkedési mátrix, pont-szomszédság lista, él lista, ...

- hurokél, párhuzamos él; G egyszerű gráf, ha nincs sem hurokéle, sem párhuzamos élei; emiatt egyszerű gráfban $d(x) = |N(x)|$

- séta: $S = x_0 e_1 x_1 \dots x_{k-1} e_k x_k$ egy k hosszúságú $x_0 - x_k$ séta, ahol minden $i \geq 1$-re e_i egy x_{i-1}-et x_i-vel összekötő él. Ha az x_i pontok mind különböznek, akkor a séta egyben út is. Ha $x_0 = x_k$, és az $x_1, \dots, x_k$ pontok különböznek, akkor S egy k hosszú kör.

- G összefüggő gráf, ha minden $x, y \in V$-re létezik x-ből y-ba menő S_{xy} séta.

- üres gráf, teljes gráf, páros gráf, hiperkocka, Petersen-gráf

- Fokszámsorozat: A $d_1, d_2, \dots, d_n$ számsorozat a G gráf fokszámsorozata, ha G fokainak nem csökkenő sorozata. Ekkor tehát $v(G) = |V(G)| = n$ és $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$.

Állítás: $2e(G) = \sum_{i=1}^{n} d_i$

Következmény: A páratlan fokú pontok száma minden gráfban páros.

Kérdés: Mikor valósítható meg (másképpen mondva: realizálható) egy nemnegatív egészekből álló számsorozat valamely G gráffal?

(i) $\{d_i\}_{i=1}^n$ pontosan akkor valósítható meg, ha $\sum_{i=1}^n d_i$ páros

(ii) $\{d_i\}_{i=1}^n$ pontosan akkor valósítható meg *hurokél nélküli* gráffal, ha (a) $\sum d_i$ páros és (b) $d_n \leq d_1 + \ldots + d_{n-1}$

(iii) [Havel-Hakimi] $\{d_i\}_{i=1}^n$ pontosan akkor valósítható meg *egyszerű* gráffal, ha a

$$d_1, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1$$

(nem feltétlenül nem csökkenően felírt) sorozat is megvalósítható egyszerű gráffal

Definíció: Fa: körmentes összefüggő gráf. Ághajtás operáció. Fa levele: olyan x pont, melyre $d(x) = 1$

Nagyon könnyű:

Állítás: Minden fának van levele.

Bizonyítás (vázlat): Tfh. nincs a T fában levél. Ekkor egy tetszőleges pontból elindulva egy elég hosszú sétával kört találnánk, mert ha eljutunk egy pontba, egy másik élen mindig tovább tudunk haladni (ha korábban még nem jártunk abban a pontban). Ez a feltevés tehát ellentmondásra vezet. □

Állítás: Minden fának legalább két levele van.

Vannak olyan fák, amiknek pontosan kettő levelük van: az utak.

Állítás: Legyen T fa n csúcson. Ekkor $e(T) = n - 1$.

Bizonyítás (vázlat): Teljes indukcióval. A 2 vagy 3 pontú fákra az állítas azonnal látszik. Tfh. minden legfeljebb N pontú fára igaz az állítás. Legyen T egy $N+1$ pontú fa. Levesszük egy levelét a rá illeszkedő éllel. Ekkor az így kapott T' gráf egy N pontú fa, tehát $N - 1$ éle van. A levett levelet visszatéve megkapjuk T-t, aminek eggyel több pontja van, mint T'-nek. Tehát az $N + 1$ pontú T éleinek száma $N - 1 + 1 = N$. □

Néhány ekvivalens definíció fára:

- minimális élszámú összefüggő gráf
- n pontú, $n - 1$ élű összefüggő gráf
- n pontú, $n - 1$ élű körmentes gráf