Diszkrét matematika üzemmérnök informatikusoknak – 1. előadás

Csaba Béla

2020. szeptember 09.

Matematikai logika

A formális logika nagyon hosszú múltra tekinthet vissza. Már kb. 2500 évvel ezelőtt foglalkozott vele Arisztotelész. Jelentősége a modern számítástudományban és számítástechnikában megkérdőjelezhetetlen.

A félév elején a logika két részébe fogunk „belekóstolni”, az ítéletkalkulusba és a predikátumkalkulusba.

Az ítéletkalkulus alapfogalma az ítélet. Az ítélet olyan állítás (kijelentő mondat vagy mondatrész), melynek igazságértéke van.
Fontos: ez az igazságérték nem mindig ellenőrizhető!
Példák:

- Álmos vagyok!
- 2020. szeptember 7-én fellőtték az első magyar űrhajót.
- $7+5 = 13$
- $7+5 = 12$
- Tegnap késtek a pesti vonatok.
- Végtelen sok prím van.
- Végtelen sok ikerprím van.

Az ítéletkalkulus alapfogalma az ítélet. Az ítélet olyan állítás (kijelentő mondat vagy mondatrész), melynek igazságértéke van, tehát lehet IGAZ vagy HAMIS.
Fontos: ez az igazságérték nem mindig ellenőrizhető!
Példák:

- Álmos vagyok! IGAZ
- 2020. szeptember 7-én fellőtték az első magyar űrhajót. HAMIS
- $7+5 = 13$ HAMIS
- $7+5 = 12$ IGAZ
- Tegnap késtek a pesti vonatok. IGAZ
- Végtelen sok prím van. IGAZ
- Végtelen sok ikerprím van. ?

Ítéletekből matematikai logikai műveletek segítségével újabb, összetett ítéleteket képezhetünk. Legyen A és B két ítélet. Az alapműveleteink a következők:

- ÉS (konjunkció), jele: $A \wedge B$. Köznyelvben nemcsak és-sel fejezzük ki. Pl. szeretem a petrezselymet, de utálom a répát.
- VAGY (diszjunkció), jele: $A \vee B$. Fontos: a „vagy" a matematikai logikában nem kizáró!
- IMPLIKÁCIÓ ($\approx$ következtetés): $A \rightarrow B$ („ha A, akkor B" vagy „A-nak szükséges feltétele B", vagy másképp „B-nek elegendő feltétele A")
- TAGADÁS (negáció):$\neg A$.
- EKVIVALENCIA: $A \leftrightarrow B$. („A pontosan akkor, ha B", „A ekvivalens B-vel")

Igazságtáblázat

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
I	I	I	I	H	I	I
I	H	H	I	H	H	H
H	I	H	I	I	I	H
H	H	H	H	I	I	I

Magyarázat: Az első két oszlop tartalmazza az A és a B ítéletek igazságértékét, a többi oszlopban a megfelelő műveletek elvégzése utáni értéket látjuk. Például a harmadik sor (A=H, B=I) és a hatodik oszlop metszetében I áll, mert $A \rightarrow B$ igaz, ha A hamis és B igaz. Ugyanebben a sorban a negyedik oszlopban I található, mert A és B közül legalább az egyik igaz.

Az implikáció talán az elsőre legnehezebben megérthető logikai művelet. Az igazságtáblázatból kiolvasható, hogy $A \to B$ csak akkor hamis, ha A igaz és B hamis. Ha A hamis, mindegy, mi az értéke B-nek, az implikáció maga (tehát a következtetés!) igaz.

Lehet a következőképpen is okoskodni: Mikor nem igaz az $A \to B$ implikáció? Ha B hamis és A igaz.

Hol a hiba?

Jól ismert dalrészlet:

Ha én cica volnék, száz egeret fognék.
De én cica nem vagyok, egeret sem foghatok.

Formalizáljuk: legyen

- A=cica vagyok
- B= száz egeret fogok

Az első mondat ítéletkalkulusba átfordítva: $A \to B$. A második mondat: $(\neg A) \to (\neg B)$. Az igazságtáblázatból (vagy csak belegondolva) látszik, hogy a két összetett ítélet nem egyenértékű. Köznyelvre átfordítva: attól, mert nem vagyunk cicák, még foghatunk száz egeret, mert pl. rágcsálóirtással foglalkozunk.

Formulák

Az előbbiekben A és B *logikai változók* (másképpen *ítéletváltozók*) voltak. Ha egy állítást formalizálunk, akkor először megkeressük a prímítéleteit („cica vagyok”, stb.), azaz azokat az ítéleteket, melyek nem tartalmaznak logikai műveleteket. A prímítéleteket ezután összekapcsolhatjuk a logikai műveleteink segítségével, hogy összetett logikai formulát kapjunk.

Formulák

Definíció

Legyen n természetes szám, és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, melyek ítéleteket jelölnek.

1. Az ítéletváltozók egyben formulák is.
2. Ha F és G két formula, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ mindegyik formula.
3. Az ítéletkalkulus minden formuláját megkaphatjuk a fenti két szabály véges sokszori alkalmazásával.

Ahogy számtanban „erősebb" a szorzás, mint az összeadás ($2 * 3 + 2 = 8 \neq 2 * (3 + 2) = 10$), úgy a logikai műveletek között is létezik precedencia, azaz „erősorrend". Ennek használatát megfelelő zárójelezéssel el lehet kerülni, mi így teszünk. Ezzel együtt néha elhagyunk egyes zárójeleket, ha ez nem befolyásolja a megértést.

Formalizálási példa

Ha esik az eső vagy nem találom a teniszütőmet, akkor nem megyek teniszezni.

Prímítéletek: $A =$ esik az eső; $B =$ megtalálom a teniszütőm; $C =$ elmegyek teniszezni

Az ítéletkalkulusbeli formula:

$$(A \vee (\neg B)) \rightarrow (\neg C)$$

Formula kiértékelése:
A változók helyébe I vagy H kerül, az eredmény az igazságérték. A kiértékelést elvégezhetjük igazságtáblázat segítségével is. Az előző formulában három logikai változó szerepel, így a táblázatnak nyolc sora lesz. Általában igaz, hogy k logikai változú formulánál 2^k sor kell az igazságtáblázathoz.

Az $(A \vee (\neg B)) \to (\neg C)$ formula kiértékelése

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \vee (\neg B)$	$(A \vee (\neg B)) \to (\neg C)$
I	I	I	H	H	I	H
I	I	H	H	I	I	I
I	H	I	I	H	I	H
I	H	H	I	I	I	I
H	I	I	H	H	H	I
H	I	H	H	I	H	I
H	H	I	I	H	I	H
H	H	H	I	I	I	I

Logikai ekvivalencia

Legyen F és G két formula. Azt mondjuk, hogy F és G logikailag ekvivalensek, ha értékük a logikai változóik bármely kiértékelésénél megegyezik. Jele: $F \equiv G$.

Az ekvivalencia algoritmikusan kiszámolható, csak az igazságtáblázatot kell elkészíteni, és összehasonlítani az összes sorban az utolsó oszlopban lévő értékeket.

De Morgan-szabályok:

$$(\neg A) \vee (\neg B) \equiv \neg(A \wedge B)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$$

De Morgan-szabály ellenőrzése

Nézzük meg mondjuk az első De Morgan-szabályt:

$$(\neg A) \vee (\neg B) \equiv \neg(A \wedge B)$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$\neg(A \wedge B)$
I	I	H	H	I	H	H
I	H	H	I	H	I	I
H	I	I	H	H	I	I
H	H	I	I	H	I	I

Mivel a két utolsó oszlop megegyezik, így a két formula valóban ekvivalens.

Még példa ekvivalens formulákra

$$A \to B \equiv (\neg A) \vee B$$

Ehhez el sem kell készítenünk az igazságtáblázatot. Tudjuk, hogy az $A \to B$ implikáció pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis. A diszjunkció pedig pontosan akkor hamis, ha mindkét tagja hamis. Tehát a fenti diszjunkció pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis, és így megvan az ekvivalencia az implikációval.

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$

A fenti ekvivalencia is belátható igazságtáblázat nélkül, ezt a hallgatóságra bízom.

Egy K logikai formula klóz (angolul clause), ha a következő alakú:

$$K = A_1 \wedge \ldots \wedge A_t,$$

ahol A_i minden i-re egy logikai változó vagy annak negáltja.
Példa:

$$K = (\neg A) \wedge B \wedge C \wedge (\neg H) \wedge Q$$

Diszjunktív normálformák

A diszjunktív normálforma vagy röviden DNF a következő alakú logikai formula :

$$D = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_r$$

$(r \geq 1)$, ahol az egyes K_i-k klózok.
Példa :

$$D = (A \wedge (\neg B) \wedge C) \bigvee ((\neg F) \wedge (\neg G) \wedge (\neg A) \wedge B)$$

Tétel

Minden ítéletkalkulusbeli formulához felírható egy azzal ekvivalens DNF.

A tétel bizonyítása nem nehéz. Megadunk egy algoritmust, amellyel a DNF kiszámolható. Az algoritmus röviden leírható.

1. elkészítjük a kérdéses formula igazságtáblázatát
2. a táblázatban kikeressük azokat a sorokat, amelyek igaz kiértékelésekhez tartoznak
3. minden ilyen sorhoz tartozik a logikai változóknak egy igazságértéke (I vagy H); ezekhez a sorokhoz klózokat rendelünk
4. egy ilyen sor klóza a következőképpen épül fel: minden változó szerepel benne; ha I abban a sorban, akkor a változót írjuk le, ha H, akkor a negáltját, majd ezeket „összeéseljük”
5. végül az így kapott klózokat „összevagyoljuk"

Egy példa DNF kiszámolására

Legyen a formula az $F = (A \vee (\neg B)) \to (\neg C)$, ennek igazságtáblázata a következő (már kiszámoltuk):

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \vee (\neg B)$	$(A \vee (\neg B)) \to (\neg C)$
I	I	I	H	H	I	H
I	I	H	H	I	I	I
I	H	I	I	H	I	H
I	H	H	I	I	I	I
H	I	I	H	H	H	I
H	I	H	H	I	H	I
H	H	I	I	H	I	H
H	H	H	I	I	I	I

Egy példa DNF kiszámolására

Most bejelöljük a táblázat azon sorait, melyekre igaz az F.

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \vee (\neg B)$	$(A \vee (\neg B)) \to (\neg C)$	
I	I	I	H	H	I	H	
I	I	H	H	I	I	I	*
I	H	I	I	H	I	H	
I	H	H	I	I	I	I	*
H	I	I	H	H	H	I	*
H	I	H	H	I	H	I	*
H	H	I	I	H	I	H	
H	H	H	I	I	I	I	*

Öt sorhoz fogunk klózt rendelni, tehát a DNF-ben öt klóz fog szerepelni. A klózok:

$$K_1 = A \wedge B \wedge (\neg C)$$

$$K_2 = A \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)$$

$$K_3 = (\neg A) \wedge B \wedge C$$

$$K_4 = (\neg A) \wedge B \wedge (\neg C)$$

$$K_5 = (\neg A) \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)$$

Végül a DNF:

$$D = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5$$

Ellenőrizhető, hogy $D \equiv (A \vee (\neg B)) \rightarrow (\neg C)$.