KOMBINATORIKA GYAKORLAT

2018. MÁRCIUS 7.

(1) Bizonyítsa be a trinomiális tételt:

$$(x+y+z)^n = \sum_{a,b,c\geq 0,\ a+b+c=n} \frac{n!}{a!b!c!} x^a y^b z^c.$$

(2) Egy választás előtti közvélemény-kutatás bejelenti, hogy arra az eredményre jutott, az A, B, illetve C párttal a megkérdezettek rendre 65%-a, 57%-a illetve 58%-a szimpatizál. Emellett 28% számára szimpatikus mind A, mind B, 30% számára szimpatikus mind A, mind C, és 27% számára szimpatikus mind B, mind C. Végül a megkérdezettek 12%-a mindhárom párttal szimpatizál. Helyes adatokat közöltek a közvélemény-kutatásban?

(3) Legyen $\varphi(n)$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma. Mutassuk meg, hogy ha n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

(4) Legyen N egy n elemű, K pedig egy k elemű halmaz. Lássuk be, hogy az $f : N \longrightarrow K$ szürjektív leképezések száma

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

(5) Lássuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0.$$

(6) Legyen $S(n,k)$ az a szám, mely megmutatja, hogy egy n elemű halmazt hányféleképpen lehet k darab nemüres részhalmazra partícionálni. Bizonyítsuk be a (4)-es feladat felhasználásával, hogy

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

(7) Legyen $\mathcal{M}$ egy olyan végtelen mátrix, melynek sorai és oszlopai egyaránt a nemnegatív egészekkel vannak megcímkézve (tehát van 0-ik sor és 0-ik oszlop is), és

$$\mathcal{M}(n,k) = (-1)^k \binom{n}{k},$$

ahol $\mathcal{M}(n,k)$ jelöli az n indexű sor és a k indexű oszlop találkozásánál álló elemet. Lássuk be az alábbi útmutatót felhasználva, hogy

$$\mathcal{M}^2(n,k) = 0,$$

ha $n \neq k$, és

$$\mathcal{M}^2(n,n) = 1.$$

Útmutató: (a) bizonyítandó, hogy

$$\mathcal{M}^2(n,k) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n}{i} (-1)^k \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i+k} \binom{n}{i}\binom{i}{k};$$

(b) kombinatorikus érveléssel (vagy $\binom{n}{k}$ képletéből algebrai úton) majd utána kisebb átalakításokkal-átjelölésekkel az $\mathcal{M}^2(n,k)$-ra adott képletből kapja meg az (5)-ös feladatban szereplő képletet.

A múlt heti házi feladat egy megoldása:

Legyen $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ valós számok sorozata. Ehhez definiáljuk a következő sorozatot:

$$b_n = \binom{n}{0}a_0 - \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}a_2 + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}a_k + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}a_n.$$

Lássuk be, hogy ekkor

$$a_n = \binom{n}{0}b_0 - \binom{n}{1}b_1 + \binom{n}{2}b_2 + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}b_k + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b_n.$$

Útmutató volt, hogy az alábbi sokat segíthet: tegyük fel, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!}x^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\beta_l}{l!}x^l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!}x^n. \tag{1}$$

Ekkor

$$\gamma_n = \binom{n}{0}\alpha_0\beta_n + \binom{n}{1}\alpha_1\beta_{n-1} + \binom{n}{2}\alpha_2\beta_{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\alpha_n\beta_0.$$

A fenti képletet használjuk először a következő behelyettesítéssel: $\beta_l = 1$, $\alpha_k = (-1)^k a_k$ és $\gamma_n = b_n$ minden l, k, n-re. Ekkor éppen azt kapjuk b_n-re, ahogyan azt definiáltuk az a_n sorozatból. Most megszorozzuk (1) mindkét oldalát

$$\sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!}x^l$$

reciprokával ($\beta_l = 1$ minden l-re). Utóbbi éppen

$$\sum_{l\geq 0} (-1)^l \frac{1}{l!}x^l.$$

(Aki ismeri már: ez az $1/e^x = e^{-x}$ tulajdonképpen, mely a reciprok képzés definíciójából közvetlenül is kiszámolható.)

Újból (1)-et alkalmazva (csak most $\gamma_n = (-1)^n a_n$, $\beta_l = (-1)^l$ és $\alpha_k = b_k$) azt kapjuk, hogy

$$(-1)^n a_n = (-1)^n \binom{n}{0} b_n + \ldots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k + \ldots + (-1)^0 \binom{n}{n} b_n,$$

ahonnan $(-1)^n$-nel való szorzással kapjuk a bizonyítandó állítást.