KOMBINATORIKA GYAKORLAT

2018. MÁJUS 9.

Néhány fogalom: $L \subseteq V(G)$ *lefogó ponthalmaz* G-ben, ha minden élének van L-beli végpontja;

$$\tau(G) = \min\{|L| : \ L \text{ lefogó}\}.$$

Egy másik fogalom: $F \subset V(G)$ *független halmaz* G-ben, ha F pontjai között nem megy él G-ben, tehát $e(G[F]) = 0$. A hozzátartozó maximalizálandó paraméter:

$$\alpha(G) = \max\{|F| : F \subset V(G), \ e(G[F]) = 0\}.$$

(1) Legyen G egy összefüggő gráf, és v egy tetszőleges csúcsa. Mutassuk meg, hogy G csúcsainak van olyan sorrendje, hogy v az utolsó csúcs, és v-t leszámítva az összes csúcsból vezet él valamely későbbi csúcsba.

(2) Az előző feladatot felhasználva igazoljuk, hogy tetszőleges összefüggő, nem reguláris G egyszerű gráfra $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

(3) Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Bizonyítsa be, hogy akárhogyan is színezzük K_n éleit két színnel, találhatunk benne olyan Hamilton-kört, mely vagy teljesen egyszínű, vagy két egyszínű ívből áll.

(4) Bizonyítsa be, hogy ha pirosra és kékre színezzük K_6 éleit, akkor lesz vagy egy tiszta piros, vagy egy tiszta kék háromszögünk.

(5) Az előző feladatot felhasználva igazoljuk, hogy hat irracionális szám között mindig van három olyan, hogy közülük bármely kettő összege irracionális.

(6) Legyen G egy gráf. A és B a következő játékot játsszák G-n: felváltva kell elfoglalniuk egy még szabad csúcsot, mely a legutóbb elfoglalt csúccsal szomszédos. A kezd egy általa kiválasztott tetszőleges csúccsal. Kinek van nyerő stratégiája, ha G-ben van teljes párosítás? És ha nincs benne teljes párosítás? (teljes párosítás: $v(G)/2$ él, melyeknek nincs közös végpontja)

(7) Bizonyítsa be, hogy $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

(8) Bizonyítsa be, hogy $F \subseteq V$ pontosan akkor független, ha $\overline{F} = V - F$ lefogó halmaz.