KOMBINATORIKA GYAKORLAT

2018. MÁJUS 2.

(1) Legyen a G gráf a következőképpen megadva. Pontjai a sakktábla mezői, két pontja pedig akkor van összekötve, ha a király egyikről a másikra egy lépésben átmehet. Mekkora $\chi(G)$? Mekkora a kromatikus száma annak a gráfnak, amit az előzőhöz hasonlóan kapunk, csak most a bástyával egy lépésben elérhető mezőket kötjük össze?

(2) Legyenek F és H gráfok, és legyen $G = F \cup H$. Lássuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(F) \cdot \chi(H)$.

(3) Legyen G egy gráf és K egy klikk G-ben. Biz. be:

$$\chi(G) \leq |K| + \chi(G - K).$$

(4) Bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

a. $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq v(G)$

b. $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{v(G)}$ (a-ból jön)

c. $e(G) \geq \binom{\chi(G)}{2}$

(5) Legyen G egy síkgráf. Az Euler-formula szerint $e(G) \leq 3v(G) - 6$. Ezt felhasználva lássa be be, hogy $\chi(G) \leq 6$.

(6) Legyen G egy $s + 5$ pontú gráf, melyet egy C_5 öt pontú körből és egy, a C_5 pontjait nem tartalmazó K_s (itt $s \geq 3$) teljes gráfból kapunk úgy, hogy K_s minden pontját összekötjük C_5 minden pontjával. Mennyi $\chi(G)$ és $\omega(G)$?

(7) Legyen G egy gráf. Lássuk be, hogy ha $\overline{G}$ (azaz G komplementere) páros gráf, akkor $\chi(G) = \omega(G)$.

(8) Legyen T egy tetszőleges k pontú fa és G tetszőleges gráf, melynek kromatikus száma legalább k. Bizonyítsa be, hogy $T \subset G$. (Ez a tartalmazás azt jelenti, hogy G-ben ki tudunk úgy jelölni k darab pontot, melyek a T pontjainak felelnek meg, hogy ha T-ben két pont szomszédos, akkor azok megfelelői szomszédosak G-ben.)