KOMBINATORIKA GYAKORLAT

2018. FEBRUÁR 28.

(1) Hány monoton növő $[n] \longrightarrow [n]$ függvény van? (Egy f függvény monoton növő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.)

(2) Hányféleképpen állíthatjuk sorba $[6]$ elemeit úgy, hogy ne a 2-es számmal kezdjük a sort?

(3) Hányféleképpen lehet n bástyát elhelyezni az $n \times n$-es sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?

(4) Tegyük fel, hogy n különböző pár zoknit rakunk be a mosógépbe. A mosás után a zoknikat egyesével húzzuk ki a mosógépből. Hányféle kihúzási sorrend esetén lesz az i-edik kihúzott zokni az, amelyik az első párt fejezi be? (az ugyanabba a párba tartozó zoknikat nem tudjuk egymástól megkülönböztetni)

(5) Írjuk fel az $(x + y + z)^3$ polinom kifejtett alakját (a zárójelek felbontása után).

(6) Egy urnában 77 golyó van, 4 piros és 73 fehér. Az azonos színű golyókat nem lehet megkülönböztetni egymástól. Egyesével, visszatevés nélkül húzzuk ki a golyókat az urnából. Hány olyan kihúzási sorrend van, melyben legfeljebb két piros golyó jön közvetlenül egymás után?

(7) Lássuk be, hogy ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{l!} x^l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n,$$

akkor

$$c_n = \binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} a_n b_0.$$

(8) Legyen $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ valós számok sorozata. Ehhez definiáljuk a következő sorozatot:

$$b_n = \binom{n}{0} a_0 - \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 + \ldots + (-1)^k \binom{n}{k} a_k + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} a_n.$$

Lássuk be, hogy ekkor

$$a_n = \binom{n}{0} b_0 - \binom{n}{1} b_1 + \binom{n}{2} b_2 + \ldots + (-1)^k \binom{n}{k} b_k + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} b_n.$$

Útmutató: a (7)-es feladat sokat segíthet. (Emellett érdekes lehet lineáris algebrai szempontból is megvizsgálni a feladatot. Ez nem feltétlenül vezet el a megoldáshoz, tanulni viszont lehet belőle.)