

## KOMBINATORIKA GYAKORLAT

2018. FEBRUÁR 21.

- (1) Bizonyítsa be az alábbi azonosságot ( $n \geq 1$ ):  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$
- (2) Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajta gyümölcsök teljesen egyformák.)
- (3) Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, a doboz 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg, a bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)
- (4) Hányféleképpen oszthatunk el  $k$  db (egyforma) egyforintost  $n$  különböző gyerek között úgy, hogy
- a) tetszőleges elosztás meg van engedve;
  - b) mindenki kapjon legalább egyet;
  - c) az  $i$ -edik gyerek legalább  $i$  forintot kapjon ( $i = 1, \dots, n$ );
  - d) mindenki páros sok forintot kapjon;
  - e) mindenki páratlan sok forintot kapjon?
- (5) Cégünknel 200.000 ft bónuszt szeretnénk szétosztani hat dolgozó között. Három dolgozónak olyan szerződése van, hogy legalább 20.000 ft-ot kell kapniuk, a többieknek pedig legalább 10.000 ft-ot. Hányféleképpen oszthatjuk szét a rendelkezésre álló összeget, ha mindenki 10.000-rel osztható forintot kap?
- (6) Hány monoton növekvő  $[n] \rightarrow [n]$  függvény van? (Egy  $f$  függvény monoton növekvő, ha  $x < y$  esetén  $f(x) \leq f(y)$ .)
- (7) Bizonyítsa be:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1}$$

- (8) Legyen  $F$  a prímszámok generátorfüggvénye,  $G$  pedig a  $\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k x^k$  formális hatványsor, vagyis

$$F = 2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

és

$$G = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots$$

- a) Számoljuk ki az  $FG$  szorzat első négy tagját.
- b) Számoljuk ki az  $F/G$  hányados első négy tagját.

(9) Legyen

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{és} \quad G = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

- a) Számoljuk ki az  $FG$  szorzat első öt tagját.
- b) Számoljuk ki az  $F/G$  hányados első öt tagját.