KOMBINATORIKA GYAKORLAT

2018. FEBRUÁR 14.

(1) Egy n elemű halmaz összes részhalmaza közül találomra kiválasztunk egyet, majd az összes részhalmaz közül megint kiválasztunk egyet (uniform módon, egymástól függetlenül). Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott részhalmaz közül az egyik tartalmazza a másikat.[1]

(2) Egy n fős osztályból szeretnénk kiállítani egy k tagú csapatot, melyben két résztvevő tartalék. Hányféle módon tehetjük ezt meg (a tartalékok kijelölését is figyelembe véve)?

(3) Veszünk a síkban öt párhuzamos egyenest, majd 10 darab ezekre merőleges párhuzamos egyenest. Hány pozitív területű téglalapot határoznak meg az így keletkezett rács vonalai?

(4) Hány pozitív egész megoldása van az alábbi egyenletnek?

$$a + b + c + d = 2018$$

(5) Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq \binom{2n}{n}.$$

Útmutató: alkalmazza a 6.a és a 6.f képleteket.

(6) Bizonyítsa be az alábbi azonosságokat ($n \geq 1$ végig):

(a)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(b)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

[1]Múlt héten láttuk: azon (X, Y) párok száma, melyekre $X \subseteq Y \subseteq [n]$, pontosan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

(c)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

(d)

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \pm \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

(e)

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

(f)

$$\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1} \quad \text{ha k < n}$$

(g)

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

(h)

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

(i)

$$\sum_{j=0}^{n-k} \binom{k+j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

(j)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

(7) Írja fel egyszerűbb alakban az

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$$

polinomot.