KOMBINATORIKA GYAKORLAT

2018. ÁPRILIS 18.

(1) Legyen G egy n pontú egyszerű gráf. Tegyük fel, hogy G teljesíti az Ore-feltételt: minden $x, y \in V(G)$, $x \neq y$-ra ha $xy \notin E(G)$, akkor $d(x) + d(y) \geq n$. Igazolja, hogy G összefüggő.

(2) Bizonyítsa be, hogy ha egy gráf minden pontjának foka legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.

(3) Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfban minden pont foka legalább δ. Bizonyítsa be, hogy G-ben van legalább δ hosszú út.

(4) Legyen G olyan gráf, melyben minden pont foka páros. Lássa be, hogy G élhalmaza éldiszjunkt körök uniója.

(5) Legyen G egy olyan összefüggő gráf, mely tartalmaz kört. Ekkor van olyan él G-ben, melyet kitörölve az így keletkezett gráf is összefüggő.

(6) Tegyük fel, hogy a G gráfnak k komponense van. Lássa be, hogy ekkor G éleinek száma legalább $n - k$.

(7) Döntse el, hogy van-e Hamilton-kör a Petersen-gráfban (ld. az ábrát)! Indoklás is kell.

(8) Tegyük fel, hogy tetszőlegesen irányítjuk a K_n éleit (emlékeztető: K_n-nel az n pontú teljes gráfot jelöljük, az élei irányítása után bármely két pontja között megy egy él a két lehetséges irányból az egyikben). Lássa be, hogy az így kapott gráf mindig tartalmaz irányított Hamilton-utat. Vajon Hamilton-kör is lesz benne?

(9) Tekintsünk egy $4 \times n$-es sakktáblát (ezen éppen úgy váltakoznak a fekete és fehér mezők, mint a szokványos 8×8-as sakktáblán), ahol $n \geq 4$. Be lehet-e járni lólépésben a táblát úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? Indoklás is kell.