KOMBINATORIKA GYAKORLAT

2018. ÁPRILIS 11.

(1) Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka páros, akkor a gráf élei irányíthatók úgy, hogy a kapott irányított gráfban minden pont kifoka megegyezzen a befokával.

(2) Egy összefüggő G gráfban $2k$ pontnak van páratlan foka ($k \geq 1$). Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza előáll k darab éldiszjunkt vonal uniójaként. Előállítható-e kevesebb vonal felhasználásával is?

(3) Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.

(4) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G egyszerű gráfra G vagy $\overline{G}$ összefüggő.

(5) Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfnak legalább $1+(n-1)(n-2)/2$ éle van, akkor összefüggő. Igaz marad-e az állítás, ha a gráfnak csak $(n-1)(n-2)/2$ éle van?

(6) A H_d d-dimenziós hiperkockát a következőképpen definiáljuk: pontjai a d-dimenziós 0-1 vektorok, két pont akkor szomszédos, ha a megfelelő vektorok éppen egy koordinátában különböznek. (a) Mikor van Euler-vonal H_d-ben?

(b) Legyen most H'_d az a gráf, melynek ugyanaz a ponthalmaza, mint a hiperkockáé, de most akkor van összekötve két csúcs, ha pontosan két koordinátában különböznek. Van-e Euler-vonal H'_d-ben?

(7) Adva van egy G összefüggő gráf. Legyen $\ell : E(G) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ egy élsúly függvény. Egy $S = x_0e_1x_1e_2x_2 \ldots x_{s-1}e_sx_s$ sétára $\ell(S) := \sum_{e\in S} \ell(e)$. A célunk megoldani az alábbi minimalizálási feladatot, és megtalálni az optimális S sétát:

$$\min\{\ell(S) : S \text{ zárt séta, melyre } E(S) = E(G)\}.$$

(Pl. egy városban egy kukásautónak minden utcán végig kell mennie – tfh. nincsen egyirányú utca–, és a feladat, hogy minél kevesebbet menjen összesen.) Lehet-e olyan éle G-nek, mely legalább háromszor szerepel az optimális megoldásban?