ALGORITMUSOK ÉS BONYOLULTSÁGELMÉLET

HARMADIK HÁZI FELADATSOR

(1) Lássuk be, hogy a Hamilton-kör probléma NP-teljességéből következik a Hamilton-út probléma NP-teljessége, és viszont, azaz a Hamilton-út probléma NP-teljességéből következik a Hamilton-kör probléma NP-teljessége.

(2) Lássuk be, hogy a Hamilton-kör probléma akkor is NP-teljes, ha a bemenet csak páros gráf lehet.

(3) A maximális méretű független halmaz probléma NP-teljességét felhasználva bizonyítsuk be a minimális méretű lefogó ponthalmaz probléma NP-teljességét. (Definíció: $S \subset V(G)$ lefogó ponthalmaz a G gráfban, ha minden $x \in V(G)$-re vagy létezik egy $y \in S$ úgy, hogy $xy \in E(G)$, vagy $x \in S$.)

(4) Legyen G egy pozitív számokkal élsúlyozott teljes gráf. Lássuk be, hogy a minimális összsúlyú Hamilton-kör megtalálása az ilyen gráfokban NP-teljes probléma.

(5) Bizonyítsuk be: Minden G egyszerű gráf $V(G)$ csúcshalmaza szétvágható úgy a diszjunkt V_1, V_2 és V_3 halmazokra, hogy $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ és az egyes V_i *halmazokon belül* legfeljebb G éleinek harmada fut, tehát G éleinek kétharmada valamely V_i és V_j $(i \neq j)$ halmaz között megy.

(6) Egy $\mathcal{H}$ hipergráf egy V véges halmazból és annak bizonyos nemüres E részhalmazaiból áll, E elemei a hipergráf élei. Ha E minden éle pontosan kettő elemű, akkor speciálisan $\mathcal{H}$ egy gráf. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ 2-színezhető, ha $\exists$ egy $\chi : V \longrightarrow \{1, 2\}$ színező függvény, hogy minden $A \in E$ élben van 1-es és 2-es színű csúcs is. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$-nak minden éle legalább két pontot tartalmaz[1], emellett ha $A, A' \in E$, akkor $|A \cap A'| \neq 1$. Lássuk be, hogy $\mathcal{H}$ ezen feltételekkel 2-színezhető.

Bármelyik négy feladat megoldását elég benyújtani. **Határidő:** 2014. május 17. (akár emailben is jó).

[1] Ez triviálisan kell ahhoz, hogy két színnel jól színezhessünk.