MMNM13G: FÉLCSOPORTELMÉLET

FELADATOK

(2020–21 őszi félév)

Minden témakörhöz ajánlatos megnézni a John M. Howie „Fundamentals of Semigroup Theory” c. monográfiájában lévő gyakorló feladatokat. Ezek egy része tanulságos, de nagyon egyszerű, ezért az alábbiakban megjelöljük, melyek adhatók be, és hány pontot érnek. Minden témakörhöz további beadható feladatokat adunk meg.

1. Példák, bevezető fogalmak és összefüggések

A beadható feladatok sorszámai a Howie-monográfia 1. fejezetéből (37–44. o.):
(*): 3., 12., 14., 16–19.;
(**): 4., 5., 20., 21.

1.1. Feladat. (***)
Legyen S olyan félcsoport, amelyben az $ab = cd$ egyenlőségből $a = c$ vagy $b = d$ következik minden $a, b, c, d \in S$ esetén. Igazolja, hogy S balzéró- vagy jobbzéró-félcsoport.

1.2. Feladat. (***)

(1) Oldja meg a Howie-monográfia 1. fejezetének 7. feladatát, és igazolja, hogy a $T_n = \mathcal{T}_{\{1,2,\dots,n\}}$ $(n \geq 3)$ félcsoportnak nincs legfeljebb kételemű generátorrendszere.

(2) Mutassa meg, hogy $S_n \cup \{\alpha\}$ generálja T_n-et tetszőleges olyan $\alpha \in T_n$ esetén, amelynek képhalmaza $n-1$ elemű.

1.3. Feladat. (**)
Oldja a Howie-monográfia 1. fejezetének 13. feladatát, valamint vizsgálja meg, hogy mely P_n $(n \in \mathbb{N})$ félcsoportoknak van legfeljebb háromelemű generátorrendszere.

1.4. Feladat. (***)
Bizonyítsa be, hogy az $(\mathbb{N}; +)$ félcsoport minden részfélcsoportja végesen generált.

1.5. Feladat. (**)
Határozza meg az $M(m, r)$ véges ciklikus félcsoport összes kongruenciáját, valamint izomorfiától eltekintve az összes homomorf képét.

1.6. Feladat. (***)
Határozza meg a biciklikus félcsoport összes kongruenciáját, valamint izomorfiától eltekintve az összes homomorf képét.

1.7. Feladat. (**)
Legyen A tetszőleges nemüres halmaz.

(1) Határozza meg az A^+ szabad félcsoport minimális generátorrendszereit és automorfizmusait. Melyik „ismert” csoporttal izomorf az automorfizmuscsoport?
(2) Igazolja, hogy van olyan részfélcsoportja A^+-nak, amely nem szabad.
(3) Mutassa meg, hogy ha A legalább kételemű, akkor A^+-nak van megszámlálhatóan szabadon generált részfélcsoportja.

1.8. Feladat. (**)
Bizonyítsa be, hogy az A^+ szabad félcsoport egy T részfélcsoportja pontosan akkor szabad, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: valahányszor $ab = cd$ valamely $a, b, c, d \in T$ elemekre, mindannyiszor $a = b$, $a = bu$ vagy $b = au$ teljesül valamely $u \in T$ esetén.

1.9. Feladat. (**)
Adjon meg tetszőleges derékszögű köteget definiáló relációkkal oly módon, hogy a megadott generátorrendszer és relációhalmaz is minimális legyen.

2. Green-relációk, reguláris félcsoportok

A beadható feladatok sorszámai a Howie-monográfia 2. fejezetéből (60–64. o.):
(*): 1., 2., 13., 20.–23.;
(**): 6., (7.+8.+9.), (16.+18.), 19.

2.1. Feladat. (**)
Legyen S félcsoport és H tetszőleges $\mathcal{H}$-osztály S-ben. Definiáljuk a $T(H) = \{x \in S^1 : Hx \subseteq H\}$ halmazt, és tekintsük minden $x \in T(H)$ esetében a $\varrho_x \in \mathcal{T}_S$ transzformáció γ_x megszorítását H-ra. Jelölje $\Gamma(H)$ a $\{\gamma_x : x \in T(H)\}$ részhalmazt $\mathcal{T}_H$-ban. Igazolja a következőket:
(1) $\Gamma(H)$ permutációcsoport a H halmazon, melynek neve: a H $\mathcal{H}$-osztály *Schützenberger-csoportja*;
(2) $|\Gamma(H)| = |H|$;
(3) ha H csoport $\mathcal{H}$-osztály, akkor $\Gamma(H)$ izomorf H-val;
(4) ha a H' $\mathcal{H}$-osztály ugyanabban a $\mathcal{D}$-osztályban van, mint H, akkor $\Gamma(H')$ izomorf $\Gamma(H)$-val.

2.2. Feladat. (***)
Adjon meg olyan félcsoportosztályt, amely tartalmazza a periodikus félcsoportokat és azokat is, amelyekre teljesül a $\min_L$ és $\min_R$ feltétel, és amelyben érvényes a $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ egyenlőség. [Más szóval: keressen közös bizonyítást a Howie-monográfia 2.1.4. és 2.1.5. Állításaira.]

2.3. Feladat. (***)
Bizonyítsa be az alábbi állításokat (az $\mathcal{L}^*$ és $\mathcal{R}^*$ reláció definícióját lásd a Howie-monográfia 2. fejezetének 7. és 9. feladatában):
(1) Ha S részfélcsoport az $\overline{S}$ reguláris félcsoportban, akkor az $\overline{S}$-beli $\mathcal{L}$ (ill. $\mathcal{R}$) reláció S-re való megszorítása benne van az S-beli $\mathcal{L}^*$ (ill. $\mathcal{R}^*$) relációban.
(2) Fordítva, tetszőleges S félcsoporthoz létezik olyan $\overline{S}_l$ (ill. $\overline{S}_r$) reguláris félcsoport, amelynek $\mathcal{L}$ (ill. $\mathcal{R}$) relációja megszorítva S-re éppen az S-beli $\mathcal{L}^*$ (ill. $\mathcal{R}^*$) relációt adja.

2.4. Feladat. (*)
Igazolja a Howie-monográfia 2. fejezet 19. feladatának analogonját az $\mathcal{I}_X$ szimmetrikus inverz félcsoportra.

2.5. Feladat. (**)
Bizonyítsa be, hogy ha egy félcsoport valamely $\mathcal{J}$-osztálya tartalmaz olyan különböző e, f idempotens elemeket, amelyekre $ef = fe = f$, akkor ez a $\mathcal{J}$-osztály tartalmaz biciklikus részfélcsoportot.

2.6. Feladat. (***)
Adjon meg olyan félcsoportot, amelyben valamely $\mathcal{J}$-osztály tartalmaz reguláris és irreguláris $\mathcal{D}$-osztályt is.

2.7. Feladat. (*)
Legyen S reguláris félcsoport, és legyen ϱ kongruencia S-en. Jelölje E az S idempotens elemeinek halmazát. Mutassa meg, hogy E akkor és csak akkor van benne egy ϱ-osztályban, ha ϱ csoportkongruencia S-en.

2.8. Feladat. (*)
Igazolja, hogy a Howie-monográfia 2. fejezet 21. feladatában bizonyítandó állítás megfordítása nem igaz általában.

2.9. Feladat. (**)
Azt mondjuk, hogy az S reguláris félcsoport A részhalmaza *zárt a konjugálásra*, ha tetszőleges $s \in S$ és $s' \in V(s)$ esetén $s'As \subseteq A$. Mutassa meg, hogy minden reguláris félcsoportban van legszűkebb olyan részfélcsoport, amely tartalmazza az összes idempotens elemet, és zárt a konjugálásra. Továbbá igazolja, hogy ez a részfélcsoport reguláris.

3. 0-egyszerű félcsoportok

A beadható feladatok sorszámai a Howie-monográfia 3. fejezetéből (95–100. o.):
(*): (1.+2.), 5., 13., 17.;
(**): 3., 4., 18.
(***): 21.

3.1. Feladat. (***)
Bizonyítsa be, hogy minden félcsoport beágyazható egyszerű monoidba. (Ötlet: gondoljon a 2.5. Feladatra.)

3.2. Feladat. (**)
Tekintsük az $S = \mathcal{M}^0[G; I, \Lambda; P]$ Rees-mátrix félcsoportot, ahol P nem feltétlenül reguláris szendvics mátrix.

(1) Igazolja, hogy az S félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha P reguláris.
(2) Írja le az S félcsoport Green-relációit.

3.3. Feladat. (**)
Mutassa meg, hogy tetszőleges S félcsoport esetén ekvivalensek a következő feltételek:

(1) S teljesen 0-egyszerű félcsoport, és E_S félháló,

(2) S izomorf egy olyan $\mathcal{M}^0[G; I, I; E]$ Rees-mátrix félcsoporttal, ahol G tetszőleges csoport, I tetszőleges halmaz, E pedig az $I \times I$ típusú egységmátrix.

Az $\mathcal{M}^0[G; I, I; E]$ félcsoportot *Brandt-félcsoportnak* nevezzük, és $B(G, I)$-vel is jelöljük.

3.4. Feladat. (**)
Bizonyítsa be, hogy tetszőleges S félcsoport esetén ekvivalensek a következő feltételek:

(1) S teljesen egyszerű,
(2) S reguláris, és minden $e \in E_S$-re eSe részcsoport S-ben;
(3) S-en van olyan ϱ kongruencia, amelyre S/ϱ derékszögű köteg, és minden ϱ-osztály részcsoport S-ben,
(4) $\mathcal{H}$ kongruencia S-en, és $S/\mathcal{H}$ derékszögű köteg.

3.5. Feladat. (**)

(1) Oldja meg a Howie-monográfia 3. fejezetének 7. feladatát, ahol $q_{\lambda\mu ij} = p_{\lambda i} p_{\mu i}^{-1} p_{\mu j} p_{\lambda j}^{-1}$.
(2) Általánosítsa az (1)-beli állítást teljesen 0-egyszerű félcsoportokra.

3.6. Feladat. (**)
Ha egy félcsoport izomorf valamely csoport és derékszögű köteg direkt szorzatával, akkor *derékszögű csoportnak* hívjuk. Igazolja, hogy tetszőleges S félcsoport esetén ekvivalensek a következő feltételek (lásd a Howie-monográfia 3. fejezetének 8. feladatát):

(1) S derékszögű csoport,
(2) S olyan teljesen egyszerű félcsoport, amelyben E_S részfélcsoportot alkot (azaz S teljesen egyszerű ortodox félcsoport),
(3) S olyan reguláris félcsoport, amelyben E_S derékszögű részköteget alkot.

3.7. Feladat. (**)
Mutassa meg, hogy egy véges S félcsoport pontosan akkor teljesen egyszerű, ha létezik olyan $r \in \mathbb{N}$, amelyre S teljesíti a következő két azonosságot: $x^{r+1} = x$ és $(xyx)^r = x^r$.

3.8. Feladat. (***)
Jelölje $\mathcal{CS}_r$ ($r \in \mathbb{N}$) azon félcsoportok osztályát, amelyek teljesítik az előző feladatbeli két azonosságot. Adja meg azonosságokkal az alábbi részosztályokat:

(1) azon $S \in \mathcal{CS}_r$ félcsoportok osztálya, amelyekben a maximális részcsoportok Abel-félék,
(2) azon $S \in \mathcal{CS}_r$ félcsoportok osztálya, amelyek olyan $\mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ Reesmátrixfélcsoporttal izomorfak, ahol P normalizált, és elemei G centrumában vannak.

3.9. Feladat. (***)
Jelölje B_2 azt a $B(G, I)$ Brandt-félcsoportot (lást a 3.3. Feladatot), A_2 pedig azt az $\mathcal{M}^0[G; I, I; P]$ Rees-mátrixfélcsoportot, ahol $G = \{1\}$ triviális csoport, $I = \{1, 2\}$, valamint

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Legyen S olyan véges reguláris félcsoport, amely nem áll elő részcsoportjainak egyesítéseként (azaz amely nem teljesen reguláris). Bizonyítsa be, hogy A_2 vagy B_2 előáll S valamely részfélcsoportjának homomorf képeként. Ha speciálisan E_S részfélcsoportot alkot S-ben (azaz ha S ortodox), akkor mindig az utóbbi teljesül.

3.10. Feladat. (**)
Legyen $T = \mathcal{M}[S; I, \Lambda; P]$ a Howie-monográfia 3. fejezetének 17. feladata előtt leírt elemben. Igazolja, hogy ha S reguláris félcsoport, akkor T reguláris elemeinek halmaza reguláris részfélcsoportot alkot T-ben.

3.11. Feladat. (**)
Oldja meg a Howie-monográfia 3. fejezetének 19. feladatát abban a javított formában, ahol a megadott idempotensek a következők: $(1,1,1), (1,1,2), (2,1,2)$, $(2,p,1)$.

4. Teljesen reguláris és inverz félcsoportok

A beadható feladatok sorszámai a Howie-könyv 4. fejezetéből (138–142. o.):
(*): 2., 8.;
(**): 1., 3., 5., 9.[1], 18.[2]

A beadható feladatok sorszámai a Howie-könyv 5. fejezetéből (211–219. o.):
(*): 2., 4.;
(**): 6., 8.

4.1. Feladat. (**)
Igazolja, hogy ha egy S félcsoport derékszögű csoportok félhálója, akkor S ortodox (azaz E_S részfélcsoport S-ben).

4.2. Feladat. (***)
(1) Oldja meg a Howie-monográfia 4. fejezetének 17. feladatát.
(2) Mutassa meg, hogy az előzőekben igazolt tulajdonság nem elegendő ahhoz, hogy a félcsoportot egyetlen valódi részhalmaza se generálja.
(3) Írja le pontosan azoknak a félcsoportoknak a szerkezetét, amelyeket egyetlen valódi részhalmazuk sem generál.

4.3. Feladat. (***)
Bizonyítsa be, hogy tetszőleges B köteg esetén ekvivalensek az alábbi tulajdonságok:
(1) B normális köteg (lásd a Howie-monográfia 4. fejezetének 18. feladatát),
(2) tetszőleges $e \in B$ esetén $\{b \in B : b \leq e\}$ részfélháló B-ben,
(3) B izomorf derékszögű kötegek erős félhálójával.

4.4. Feladat. (***)
Azt mondjuk, hogy egy köteg *reguláris*, ha teljesíti az $xyzx = xyxzx$ azonosságot. Igazolja, hogy egy köteg akkor és csak akkor reguláris, ha rajta az $\mathcal{L}$ és $\mathcal{R}$ relációk kongruenciák.

[1] Lásd a Howie-monográfia 2. fejezetének 21. feladatát.
[2] Egy köteget *normálisnak* hívunk, ha teljesíti az $xyzx = xzyx$ azonosságot.

A csoportok szemidirekt szorzatához hasonlóan definiálhatjuk tetszőleges *félcsoport szemidirekt szorzatát valamely csoporttal.* Legyen K félcsoport, és legyen G olyan csoport, amely (balról) hat K-n, azaz adott egy $\varphi\colon G \to \operatorname{Aut}^* K$ homomorfizmus, ahol $\operatorname{Aut}^* K$ a K félcsoport automorfizmusainak, mint balról írt leképezéseknek a csoportja. Szokásos módon tetszőleges $a \in K$ és $g \in G$ esetén ${}^g a$ jelöli a $(g\varphi)a$ elemet. A $K \rtimes_\varphi G$ szemidirekt szorzat alaphalmaza a $K \times G$ Descartes-szorzat, a szorzást pedig az $(a, g)(b, h) = (a \cdot {}^g b, gh)$ képlet definiálja. Könnyen ellenőrizhető (tegye meg!), hogy $K \rtimes_\varphi G$ félcsoport. A hatásnak nem mindig adunk nevet, ilyenkor „$\rtimes$" indexe elmarad.

4.5. Feladat. (**)
Az előző konstrukció bal-jobb duálisa $G \ltimes_\varphi K$, az ún. „fordított" szemidirekt szorzat. Legyen adott egy K félcsoport, egy G csoport és annak egy φ bal oldali hatása K-n. Bizonyítsa be, hogy van G-nek olyan jobb oldali ψ hatása K-n, amelyre $G \ltimes_\psi K$ izomorf $K \rtimes_\varphi G$-vel. (A Csoportelmélet tárgyban a „fordított" szemidirekt szorzatot vezettük be szemidirekt szorzat néven. Az állítás azt mutatja, hogy a két konstrukció általánosabban is egyenékű.)

4.6. Feladat. (**)
Legyen G csoport, Y pedig olyan félháló, melyen G (balról) hat.

(1) Határozza meg az $Y \rtimes G$ szemidirekt szorzat idempotens elemeit, összes elemének inverzét, valamint a Green-féle $\mathcal{L}$ és $\mathcal{R}$ relációkat.
(2) Mutassa meg, hogy $Y \rtimes G$ pontosan akkor egységelemes, ha Y-ban van legnagyobb elem.
(3) Igazolja, hogy $Y \rtimes G$ E-unitér[1] inverz félcsoport, és a második projekció (ami nyilván homomorfizmus) által indukált kongruencia a legkisebb csoportkongruencia $Y \rtimes G$-n.

4.7. Feladat. (***)
Bizonyítsa be, hogy tetszőleges M inverz monoidra ekvivalens az alábbi két tulajdonság:

(1) Tetszőleges $a \in M$ esetén létezik olyan $h \in H_1$, amelyre $a \leq h$. (Itt H_1 az M egységelemének $\mathcal{H}$-osztálya.)
(2) M előáll az E_M félhálónak a H_1 csoporttal vett valamely szemidirekt szorzatának homomorf képeként.

5. Fundamentális és E-unitér inverz félcsoportok

A beadható feladatok sorszámai a Howie-könyv 5. fejezetéből (211–219. o.):
(*): 11.(a),(b), 13., (31.(b)+35.);
(**): 10.(a)–(f), 14., 15., (22.+23.), 32.
(***): (36.+37.+38.)

5.1. Feladat. (**)
Igazolja, hogy tetszőleges S inverz félcsoportban minden a, b elemre ekvivalensek az alábbiak:

(1) $a \,\sigma\, b$,
(2) $ab^{-1} \in \operatorname{Ker} \sigma$,
(3) $a^{-1}b \in \operatorname{Ker} \sigma$.

5.2. Feladat. (**)

(1) Mutassa meg, hogy egy S inverz félcsoport pontosan akkor egyszerű, ha tetszőleges $e, f \in E_S$ esetén létezik olyan $e' \in E_S$, amelyre $e' \leq e$ és $e' \mathcal{D} f$.

(2) Igazolja a Howie-monográfia 5. fejezetének 31.(a) feladatát.

5.3. Feladat. (**)
Mutassa meg, hogy tetszőleges S inverz félcsoport esetén ekvivalensek a következők:

(1) S E-unitér,

(2) S-nek van idempotenstiszta (idempotent pure) csoportkongruenciája.

Továbbá bizonyítsa be az E-unitér inverz félcsoportokra vonatkozó struktúratétel alkalmazása nélkül, hogy minden E-unitér S inverz félcsoportban teljesülnek a következők tetszőleges $a, b \in S$ esetén:

(3) az a, b elemeknek pontosan akkor van közös alsó korlátja S-ben a természetes részbenrendezésre nézve, ha $a \,\sigma\, b$,

(4) ha az a, b elemeknek van közös alsó korlátja S-ben a természetes részbenrendezésre nézve, akkor van legnagyobb közös alsó korlátja is.

5.4. Feladat. (**)
Bizonyítsa be, hogy egy inverz monoid akkor és csak akkor E-unitér és faktorizálható, ha izomorf egy egységelemes félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatával. (Lásd a 4.7. Feladatot.)

5.5. Feladat. (***)
Bizonyítsa be, hogy minden E-unitér inverz félcsoport beágyazható félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatába. (Segítség: ha $S = \mathcal{M}(G, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor a szemidirekt szorzatnál a csoport választható G-nek, a félhálónak pedig „tartalmaznia kell" $\mathcal{X}$-et.)