

Tételek az Algebra alapvizsgára

1. **Logika.** Logikai műveletek, állítások ekvivalenciája. Kvantorok, formalizálás, tagadás.
2. **Műveletek, algebrai struktúrák.** Műveletek, műveletek tulajdonságai, alapvető algebrai struktúrák: félcsoport, csoport, gyűrű, test.
3. **Komplex számok.** Komplex számok, kanonikus és trigonometrikus alakjuk, Moivre képlete, gyökvonás komplex számokból, egységgyökök. Alkalmazások geometriai feladatok megoldására.
4. **Polinomok.** Polinomok helyettesítési értékei és gyökei, a polinomfüggvény fogalma. Horner-elrendezés, Bézout tétele, Lagrange-interpoláció. A harmad- és negyedfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. Az algebra alaptétele és következményei. Polinom deriváltja, többszörös gyökök.
5. **Leképezések és relációk.** Leképezések, injektív, szürjektív, bijektív leképezések. Ekvivalenciák és osztályozások, leképezés magja, részbenrendezett halmazok. Ekvivalenciák alkalmazása a számfogalom kialakításában. Természetes számok, egész számok, racionális számok. A racionális számok tizedes tört alakja. A racionális kitevőjű hatvány fogalma, a hatványozás azonosságai.
6. **Permutációk.** Leképezések szorzása. Véges halmaz permutációi: idegen ciklusok szorzatára bontás, előállítás transzpozíciók szorzataként, páros és páratlan permutációk.
7. **Oszthatóság, prímfelbontás az egész számok körében.** Az oszthatóság és tulajdonságai az egész számok körében, legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös. Lineáris diofantoszi egyenletek. Prímszám, összetett szám. A számelmélet alaptétele, az egész számok prímtenyezős, ill. prímhatványtenyezős alakja.
8. **A modulo n kongruencia.** A mod n kongruencia, maradékosztályok. Lineáris kongruenciák és kongruenciarendszerek, kínai maradéktétel, Wilson-tétel.
9. **Számelméleti függvények.** Nevezetes számelméleti függvények (osztók száma, osztók összege, Euler-féle φ függvény). Euler--Fermat-tétel. Gyengén multiplikatív számelméleti függvények, számelméleti függvények konvolúciója, összegzési és megfordítási függvény, Möbius-féle inverziós formula. Tökéletes számok, Mersenne- és Fermat-prímek.
10. **Nevezetes számelméleti problémák (prímszámok, négyzetszámok).** Prímek száma, a $4k-1$ alakú prímek. Dirichlet tétele a számtani sorozatokban előforduló prímekről. Tetszőlegesen nagy hézag a prímek között, felső becslés az n -edik prímszámra, a prímek reciprokainak összege. Csebisev-tétel, prímszámtétel. Pitagoraszai számhármások. A „nagy” Fermat-tétel, Waring-problémakör. Nevezetes számelméleti problémák, titkosírások.
11. **A polinomok számelmélete.** Az egyhatározatlanú polinom fogalma. Test fölötti polinomok maradékos osztása. Az oszthatóság és tulajdonságai a test fölötti polinomgyűrűkben, legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös. Lineáris kongruenciák és lineáris „diofantoszi” egyenletek test fölötti polinomgyűrűkben.

12. **Irreducibilis polinomok.** Irreducibilis polinomok a komplex és valós együtthatós polinomok gyűrűjében. Polinomok irreducibilis hatványtényező, ill. gyöktényező alakja. Egyértelmű irreducibilis faktorizáció a test fölötti polinomgyűrűben. Egész együtthatós polinomok racionális gyökei, irreducibilis polinomok a racionális együtthatós polinomok gyűrűjében, Schönemann--Eisenstein-tétel. A racionális törtfüggvények teste, parciális törtekre bontás.
13. **Többhatározatlanú polinomok, algebrai azonosságok, algebrai számok.** Test fölötti többhatározatlanú polinomok gyűrűje. Binomiális és polinomiális tétel, az n -edik hatványok különbsége (összege). Szimmetrikus polinomok. Algebrai és transzcendens számok. Valós számok approximációja racionális számokkal, Dirichlet approximációs tétele.
14. **Mátrixok, determinánsok.** Mátrixműveletek és tulajdonságaik. Determináns és kifejtése, a ferde kifejtés tétele. A determinánselméleti dualitási elv. A determinánsok szorzástétele, mátrixok inverze. Cramer-szabály.
15. **Vektorterek.** Vektortér, altér, alterek metszete és összege. Alterek direkt összege. Lineáris kombináció, generátorrendszer. Lineárisan függő és független vektorrendszerek, kicserélési tétel, bázis, dimenzió. Vektor koordinátái adott bázisban.
16. **Mátrix és vektorrendszer rangja.** Mátrix determinánsrangja, rangszám-tétel. Mátrixok lépcsős alakra hozása, vektorrendszerből maximális lineárisan független részrendszer kiválasztása. Vektorrendszer rangja. Alterekre vonatkozó dimenziótétel.
17. **Lineáris egyenletrendszerek.** Gauss-elimináció, Kronecker--Capelli-tétel. Mátrixegyenletek megoldása és a négyzetes mátrixok inverze. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak altere.
18. **Lineáris leképezések.** Lineáris leképezések és transzformációk, vektorterek izomorfijája. Lineáris leképezések mag- és képtere, rangja, lineáris leképezések dimenziótétele. Műveletek lineáris leképezésekkel.
19. **Lineáris leképezés mátrixa.** Lineáris leképezés mátrixa adott bázisban. Bázisátmenet-mátrix, hasonló mátrixok. Lineáris transzformációk és mátrixok sajátértékei, sajátvektorai és karakterisztikus polinomja. Jordan-normálalak.
20. **Euklideszi tér.** Euklideszi tér, ortogonális és ortonormált vektorrendszer, ortogonalizációs eljárás, ortogonális mátrix. A főtengety- és a spektráltétel.