

Kutatási és szakdolgozati témakiírások

Az alábbi táblázatban összefoglaltam, hogy az egyes témaköröket kiknek ajánlom:

Cím	BSc	MSc	Kutatás	ÚNKP	Középiskolás
Dominálási problémák gráfokon	✓	✓	✓	✓	✓
Színezési problémák a gráfelméletben	✓	✓	✓	✓	✓
Gráfok hatványai	✓	✓	✓	✓	✓
Gráfok, tulajdonságaik és a spektrum kapcsolata	✓	✓	✓	✓	
Lefogó ponthalmazok véges elemszámú projektív geometriákban	✓	✓	✓	✓	
Erősen reguláris gráfok és blokkrendszerek	✓	✓	✓	✓	
Irányítások (Frank szám)	✓	✓	✓	✓	✓

A továbbiakban egy kicsit részletesebben írok az egyes témakörökről, de nem célom a leírásokat egy-egy konkrét témára leszűkíteni. Azt gondolom, hogy az érdeklődő hallgatókkal személyesen konzultálva közösen találunk majd az adott témakörön belül olyan irányt, amerre érdemes együtt elindulni.

Az általam kínált témakörökhöz kifejezetten ajánlott könyveket itt foglalnám össze, ezeket értelemszerűen több témakörhöz is felsorolhattam volna:

Ajánlott irodalom

[BondyMurty] J.A. BONDY, U.S.R. MURTY, Graph theory. *Springer* (2008)

[Diestel] R. DIESTEL, Graph theory. *Springer-Verlag New York* (1997)

[BrouwerHaemers] A.E. BROUWER, W.H. HAEMERS, Spectra of graphs. *Springer* (2011)

[GodsilRoyle] C. GODSIL, G.F. ROYLE, Algebraic graph theory. *Springer New York* (2001)

[Jungnickel] D. JUNGNICHEL, Graphs, Networks and Algorithms. *Springer-Verlag Berlin H.* (2013)

[KissSzonyi] Gy. KISS, T. SZÖNYI Véges geometriák. *Polygon kiadó, Szeged* (2001)

Dominálási problémák gráfokon

Egy $G(V, E)$ gráf $D \subset V$ csúcshalmazát dominálónak nevezzük, ha minden csúcsra teljesül, hogy D -beli vagy létezik olyan szomszédja, ami D -beli. A fenti alapfogalomnak számos további változata ismert, és legtöbbjüknek mára már hatalmas irodalma van. A témakör másik nagy szelete a gráfokon játszható kétszemélyes dominálási játékok világa.

Cél lehet bizonyos dominálási fogalmak/játékok körbejárása és a már ismert eredmények összefoglalása. Bárki számára megérthető kutatási kérdések akadnak bőven, lényegében semmilyen alapozás nem szükséges ahhoz, hogy a problémákkal el lehessen kezdeni foglalkozni.

Kedvcsinálók

- [1] W. GODDARD, M.A. HENNING, Independent domination in graphs: A survey and recent results, *Discrete Mathematics*, Volume **313**, Issue 7 (2013), 839–854.
- [2] M.A. HENNING, A survey of selected recent results on total domination in graphs, *Discrete Mathematics*, Volume **309**, (2009), 32—63.
- [3] Cs. BUJTÁS, B. PATKÓS, Zs. TUZA, M. VIZER, Domination game on uniform hypergraphs, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. **258**, (2019), 65–75.

Színezési problémák a gráfelméletben

A gráfok alapvető színezési problémájában a csúcsokat/éleket színezzük olyan módon, hogy azonos színű csúcsok/élek nem lehetnek szomszédosak/nem lehet közös csúcsuk. Tipikusan az a minimális színszám az érdekes, amivel egy gráf a fent leírt módon kiszínezhető. Hipergráfok jó színezését többféleképpen is definiálhatjuk, sőt az úgynevezett kevert hipergráfok elméletében különböző hiperélekre akár eltérő szabályok is vonatkozhatnak.

Cél lehet bizonyos csúcs- vagy élszínezési eredmények/cikkek megértése és néhány témakör összefoglalása. A kutatási problémák mindenki számára világosan érthetőek, lényegében semmilyen alapozás nem szükséges ahhoz, hogy a problémákkal el lehessen kezdeni foglalkozni.

Kedvcsinálók

- [1] Zs. TUZA, Graph colorings with local constraints — A survey, *Discussiones Mathematicae – Graph Theory*, Vol. **17**, No. 2 (1997), 161–228.
- [2] F. CHANG, Y. LIANG, Z. PAN, X. ZHU, Antimagic Labeling of Regular Graphs, *Journal of Graph Theory*, Vol. **82**, Issue. 4 (2016), 339–349.
- [3] A. KOSTOCHKA, X. LIU, Packing $(1,1,2,4)$ -coloring of subcubic outerplanar graphs, arXiv preprint arXiv:2005.04803v1
- [4] V. I. VOLOSHIN, Coloring Mixed Hypergraphs: Theory, Algorithms and Applications. *Amer. Math. Soc. Providence* (2002)

Gráfok hatványai

Egy egyszerű $G(V, E)$ irányítatlan gráf k -adik hatványát G^k -val jelöljük. G^k szintén egy egyszerű gráf, aminek csúcsai megegyeznek G csúcsaival, viszont G^k -ban két csúcs között irányítatlan él fut, ha G -ben a két csúcs távolsága legfeljebb k . A fogalom irányított gráfokra is definiálható.

A T fa k -adik levélhatványa az a G gráf, aminek csúcsai T levelei és két csúcs között él fut, ha T -ben a két megfelelő levél távolsága legfeljebb k . Azaz G nem más, mint a T^k hatványgráfnak a T levelei által feszített részgráfja. Könnyen belátható például, hogy a G gráf 2-levélhatvány pontosan akkor, ha teljes részgráfok diszjunkt uniójaként áll elő.

Cél lehet a különböző fogalmak bemutatása és az alapvető megfigyelések összefoglalása. Az érdeklődők számára izgalmasnak ígérkező kutatási kérdések is akadnak.

Kedvcsinálók

- [1] A. POKROVSKIY, Edge growth in graph powers, *Australasian Journal of Combinatorics*, Volume **58(2)**, (2014), 347–357.
- [2] M. DeVOS, J. McDONALD, D. SCHEIDE, Average degree in graph powers, *J. Graph Theory*, Volume **72(1)**, (2013), 7—18.
- [3] N. NISHIMURA, P. RAGDE, D.M. THILIKOS, On Graph Powers for Leaf-Labeled Trees, *Journal of Algorithms*, Vol. **42(1)**, (2002), 69–108.

Gráfok, tulajdonságaik és a spektrum kapcsolata

Egy $G(V, E)$ gráf adjacencia mátrixának sajátértékeit (multiplicitásokkal együtt) a gráf spektrumának nevezzük. Izgalmas kérdés az, hogy vajon mik azok a G gráfok, amiket meghatároz a spektrumuk? Azaz ha bármelyik másik H gráf spektruma megegyezik G -ével, akkor $G \cong H$, vagyis izomorfak. További érdekes problémákat kapunk, ha azt vizsgáljuk, hogy melyik gráftulajdonságok (pl. maximális fokszám, kromatikus szám, van-e benne teljes párosítás, stb.) azok, amiket meghatároz a spektrum?

Cél lehet a spektrális gráfelméleti alapozás után az ismert eredmények áttekintése és újabb irányok bemutatása. Vannak nyitott kérdések a fent említett kérdéskörökben is, amikhez a lineáris algebrai alapismeretek elsajátítása javasolt.

Kedvcsinálók

- [1] C.D. GODSIL, B.D. MCKAY, Constructing cospectral graphs, *Aequationes Math.* Volume **25**, (1982), 257–268.
- [2] E.R. VAN DAM, W.H. HAEMERS, Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra and its Applications*, Volume **373**, (2003), 241–272.
- [3] M. DOOB, W.H. HAEMERS, The complement of the path is determined by its spectrum, *Linear Algebra Appl.*, Vol. **356**, (2002), 57–65.
- [4] H. LIN, X. LIU, J. XUE, Graphs determined by their A_α -spectra, *Discrete Mathematics*, **342**(2), (2019), 441–450. (<https://arxiv.org/abs/1709.00792>)

Lefogó ponthalmazok véges elemszámú projektív geometriákban

Véges elemszámú projektív síkokról és terekről minden szükséges információ megtalálható a [KissSzonyi] könyvben. Ezek az illeszkedési struktúrák a matematika számos különböző területén előkerülnek izgalmas példaként. Teljesül bennük a dualitás elve (a pontok és egyenesek szerepe felcserélhető), és igen szimmetrikusak. Vizsgálhatunk bennük lefogó ponthalmazokat, íveket, irány problémát, amikhez felhasználhatunk kombinatorikus megfigyeléseket, vagy algebrai módszereket: például a Rédei-polinomokat.

Cél lehet az axiomatikus bevezetés után valamely konkrétabb témakör (pl. lefogó ponthalmazok) részletes ismertetése, vagy az alapvető és a bonyolultabb módszerek megértése és áttekintése. Az egyetemen a Véges Geometria szeminárium keretén belül sok izgalmas, friss eredménnyel ismerkedhetünk meg, és mi magunk is találhatunk érdekes nyitott problémákat.

Kedvcsinálók

- [1] J.W.P. HIRSCHFELD, Projective Geometries over Finite Fields, *Clarendon Press, Oxford*, (1999)
- [2] L. RÉDEI, Lückenhafte Polynome über endlichen Körpern. *Birkhäuser Verlag, Basel*, (1970) (English translation Lacunary polynomials over finite fields, North Holland, 1973)
- [3] A. BLOKHUIS, A.E. BROUWER, T. SZŐNYI, ZS. WEINER, On q -analogues and stability theorems. *Journal of Geometry*, Volume **101(1-2)**, (2011), 31–50.
- [4] Z.L. BLÁZSIK, T. HÉGER, T. SZŐNYI, On the upper chromatic number and multiple blocking sets of $PG(n, q)$, *Journal of Combinatorial Designs*, Vol. **28 (2)**, (2020), 118–140.

Erősen reguláris gráfok és blokkrendszerek

A G gráfot (n, k, λ, μ) paraméterű erősen reguláris gráfnak nevezzük, ha a csúcsok száma n , a gráf k -reguláris, és bármely két összekötött pont közös szomszédainak száma λ , bármely két összekötetlen pont közös szomszédainak a száma pedig μ . A $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ egyszerű illeszkedési struktúrát $2 - (v, k, \lambda)$ -blokkrendszernek nevezzük, ha $|\mathcal{P}| = v$, minden $B \in \mathcal{B}$ blokkra teljesül, hogy $|B| = k$, azaz k -uniform, és bármely két pont pontosan λ blokkban van benne egyszerre. Ha $\lambda = 1$, akkor megkapjuk a híres Steiner-rendszereket.

Cél lehet az illeszkedési struktúrák alapvető összefüggéseinek feltárása, majd a két fogalom közötti kapcsolat megértése és bemutatása. Továbbá a dolgozat állhat a Steiner-rendszerek számos tulajdonságának sorrávételezéséből is. Steiner rendszerekkel kapcsolatos kutatási kérdéseken is gondolkozhatunk.

Kedvcsinálók

- [1] TH. BETH, D. JUNGnickEL, H. LENZ, Design Theory I–II, *Cambridge University Press*, (1999)
- [2] R. C. BOSE, Strongly regular graphs, partial geometries and partial balanced designs, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 389–419.
- [3] T. SZŐNYI, Szimmetrikus struktúrák, (2013)
http://etananyag.ttk.elte.hu/Files/downloads/_SZONYI_Szimm_strukt.pdf

Irányítások (Frank szám)

Tekintsünk egy $G(V, E)$ irányítatlan gráfot, és irányítsuk meg mindegyik élét az egyik végpontjától a másik felé. Az így kapott gráf egy irányított gráf, méghozzá a G irányítatlan gráf egy lehetséges megirányítása. Az irányított gráfok is teljesen természetesen előforduló struktúrák a valós életből származó alkalmazásokban, ezért mára már hatalmas irodalmuk van. Szeretnék viszont kiemelni egy viszonylag friss témakört, amiben számos érdekes kutatási kérdés vár még megválaszolásra.

Egy irányítást erősen összefüggőnek nevezünk, amennyiben bármely csúcsból bármelyik másikba eljuthatunk irányított úton. Robbins tétele azt mondja ki, hogy egy irányítatlan gráfnak pontosan akkor létezik erősen összefüggő irányítása, ha G maga kétszeresen élösszefüggő. Ennek általánosítása Nash-Williams tétele ami kimondja, hogy G -nek pontosan akkor létezik k -szorosan erősen összefüggő irányítása (azaz bármely $k - 1$ él törlése után is még erősen összefüggő), ha G maga $2k$ -szorosan élösszefüggő. Így ha G 3-szorosan élösszefüggő, akkor egy erősen összefüggő irányítására tekinthetjük azokat az éleket, amik törlése esetén a visszamaradó irányított gráf még mindig erősen összefüggő. Ezeket az éleket elhagyhatónak nevezzük.

Egy 3-élösszefüggő gráf esetén vegyünk néhány megirányítását úgy, hogy a gráf minden éle legalább az egyik irányításban elhagyható legyen. Egy rögzített G -re az ehhez szükséges minimális számú irányítás száma a G Frank száma. A cél lehet ennek a Frank számnak vizsgálata konkrét 3-élösszefüggő gráfokra számítógéppel, illetve általános 3-élösszefüggő gráfokra a Frank szám ismert becsléseinek javítása. Továbbá az általunk megtalált végtelen sok példától eltérő újabb példa keresése, aminek Frank száma épp 3. Illetve a kérdés általánosítható magasabb összefüggőség esetére.

Kedvcsinálók

- [1] F. HÖRSCH, Z. SZIGETI, Connectivity of orientations of 3-edge-connected graphs, *European Journal on Combinatorics*, **94** (2021)
- [2] J. BARÁT, Z.L. BLÁZSIK, Quest for graphs with Frank number 3, *Australasian Journal of Combinatorics*, **88** (1) (2024), 52–76.
- [3] J. BARÁT, Z.L. BLÁZSIK, Improved upper bound on the Frank number of 3-edge-connected graphs, *European Journal of Combinatorics*, **118** (2024), 103913.
- [4] J. GOEDGEBEUR, E. MÁČAJOVÁ, J. RENDERS, Frank number and nowhere-zero flows on graphs, *arXiv preprint: <https://arxiv.org/abs/2305.02133>*